Etapa 4, problema 2

Camelia Oprea, clasa a 9-a

Fie $a,b,c>0$ cu $abc=a+b+c+2$.

Să se demonstreze că $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$. (1)

Soluţie:

$a,b,c>0$. Inegalitatea (1) este condiţionată de relaţia $abc=a+b+c+2$.

Pentru omogenizare fac schimbarea de variabile: $a=\frac{y+z}{x},\ \ b=\frac{z+x}{y},\ \ c=\frac{x+y}{z},\ \ x,y,z>0$

şi verific condiţia:

$$\frac{y+z}{x}\cdot\frac{z+x}{y}\cdot\frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+2\quad\Big|\cdot xyz>0$$

$$\Rightarrow\ (y+z)(z+x)(x+y)=yz(y+z)+xz(x+z)+xy(x+y)+2xyz$$

$$\Rightarrow\ xyz+y^2z+x^2y+xy^2+z^2x+z^2y+x^2z+xyz=y^2z+yz^2+x^2z+xz^2+x^2y+xy^2+2xyz$$

Toţi termenii se reduc şi rezultă

$\Rightarrow\ 0=0$ adevărat $\forall x,y,z>0$.

Ca urmare, inegalitatea dată se transformă într-o inegalitate (necondiţionată) pentru $x,y,z>0$:

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}\geq 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\sqrt{\frac{y+z}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y+z}}\right)+\left(\sqrt{\frac{z+x}{y}}-2\sqrt{\frac{y}{z+x}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x+y}{z}}-2\sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)\geq 0 \qquad (2)$$

Dar

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y+z}}=\frac{y+z-2x}{\sqrt{x(y+z)}}=\frac{y-x}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{z-x}{\sqrt{x(y+z)}}$$

Şi atunci (2) devine

$$\frac{y-x}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{z-x}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{z-y}{\sqrt{y(z+x)}}+\frac{x-y}{\sqrt{y(z+x)}}+\frac{x-z}{\sqrt{z(x+y)}}+\frac{y-z}{\sqrt{z(x+y)}}\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{y(z+x)}}-\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}}\right)+(y-z)\left(\frac{1}{\sqrt{z(x+y)}}-\frac{1}{\sqrt{y(z+x)}}\right)+(z-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}}-\frac{1}{\sqrt{z(x+y)}}\right)\geq 0$$

Dar

$$\frac{1}{\sqrt{y(z+x)}}-\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}}=\frac{\sqrt{x(y+z)}-\sqrt{y(z+x)}}{\sqrt{xy(y+z)(z+x)}}=\frac{z(x-y)}{\sqrt{xy(y+z)(z+x)}\left(\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}\right)}$$

şi analoagele. În consecinţă inegalitatea devine

$$\frac{z(x-y)^2}{\sqrt{xy(y+z)(z+x)}\left(\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}\right)}+\frac{x(y-z)^2}{\sqrt{yz(z+x)(x+y)}\sqrt{y(z+x)+z(x+y)}}+$$

$$+\frac{y(z-x)^2}{\sqrt{zx(x+y)(y+z)}\left(\sqrt{z(x+y)}+\sqrt{x(y+z)}\right)}\geq 0 \quad \text{adevărat}\ \ \forall x,y,z>0$$

iar egalitatea are loc pentru $x=y=z$.

Ca urmare inegalitatea (1) este adevărată cu egalitate pentru $a=b=c=2$.