Clasa a IX-a - Etapa 5 - Problema 2

Enunţ: *Se consideră un triunghi ascuţitunghic* ABC. *Construim şirul de triunghiuri* $(A_nB_nC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definit prin* $A_0B_0C_0 = ABC$ *iar pentru triunghiul* $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, *măsurile unghiurilor sale sunt definite prin* $\widehat{A_{n+1}} = \frac{\pi - \widehat{A_n}}{2}$, $\widehat{B_{n+1}} = \frac{\pi - \widehat{B_n}}{2}$, $\widehat{C_{n+1}} = \frac{\pi - \widehat{C_n}}{2}$ *iar raza cercului circumscris* R_{n+1} *este egală cu* $\sqrt{2R_nr_n}$, *unde* R_n, r_n *sunt raza cercului circumscris, respectiv înscris triunghiului* $A_nB_nC_n$. *Să se arate că:*

- **a)** *Dacă* S_n *reprezintă aria triunghiului* $A_nB_nC_n$, *atunci şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este constant;*
- **b)** *Să se demonstreze că şirul* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este crescător.*

Soluţie: Fie p_n semiperimetrul triunghiului $A_nB_nC_n$. Avem în continuare

$$a_{n+1} = 2R_{n+1}\sin A_{n+1} = 2\sqrt{2R_nr_n}\cos\frac{A_n}{2} = 2\sqrt{2\frac{a_nb_nc_n}{4S_n}\cdot\frac{S_n}{p_n}}\cdot\sqrt{\frac{p_n(p_n-a_n)}{b_nc_n}}$$

$= \sqrt{a_n(2p_n - 2a_n)} = \sqrt{a_n(b_n + c_n - a_n)}$, deci $a_{n+1} = \sqrt{a_n(b_n+c_n-a_n)}$ şi analoagele.

a) Avem $S_{n+1} = \frac{1}{2}b_nc_n\sin A_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{b_n(a_n+c_n-b_n)}\sqrt{c_n(a_n+b_n-c_n)}\cos\frac{A_n}{2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{b_n(a_n+c_n-b_n)}\sqrt{c_n(a_n+b_n-c_n)}\sqrt{\frac{p_n(p_n-a_n)}{b_nc_n}} = S_n$ deci şirul S_n este constant.

b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n(b_n+c_n-a_n)} \le \frac{a_n+b_n+c_n-a_n}{2} = \frac{b_n+c_n}{2}$ şi analoagele. Prin însumare deducem că $a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1} \le a_n+b_n+c_n$ deci şirul $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător. Cum $S_n = p_nr_n$ atunci şirul $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător.