

# The 5<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

Day 1: Friday, March 2, 2012, Bucharest

Language: Romanian

**Problema 1.** Fiind dat un număr finit de băieți și fete, o *mulțime sociabilă de băieți* este o mulțime de băieți astfel încât fiecare fată cunoaște cel puțin un băiat din acea mulțime; iar o *mulțime sociabilă de fete* este o mulțime de fete astfel încât fiecare băiat cunoaște cel puțin o fată din acea mulțime. Demonstrați că numărul de mulțimi sociabile de băieți și numărul de mulțimi sociabile de fete au aceeași paritate. (Dacă un băiat cunoaște o fată, atunci și fata îl cunoaște pe băiat, și vice-versa.)

(POLAND) MAREK CYGAN

**Problema 2.** Fiind dat un triunghi  $ABC$ , fie  $D$ ,  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor  $BC$ ,  $CA$ , respectiv  $AB$ . Cercul  $BCF$  și dreapta  $BE$  se intersectează a doua oară în punctul  $P$ , iar cercul  $ABE$  și dreapta  $AD$  se intersectează a doua oară în punctul  $Q$ . Finalmente, dreptele  $DP$  și  $FQ$  se intersectează în punctul  $R$ . Demonstrați că centrul de greutate  $G$  al triunghiului  $ABC$  se află pe cercul  $PQR$ .

(UNITED KINGDOM) DAVID MONK

**Problema 3.** Fiecare număr întreg strict pozitiv este colorat roșu sau albastru. O funcție  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  are următoarele două proprietăți:

- (a) dacă  $x \leq y$ , atunci  $f(x) \leq f(y)$ ; și
- (b) dacă  $x$ ,  $y$  și  $z$  sunt întregi strict pozitivi (nu neapărat distincți) de aceeași culoare, și dacă  $x + y = z$ , atunci  $f(x) + f(y) = f(z)$ .

Demonstrați că există un număr pozitiv  $a$  astfel încât  $f(x) \leq ax$  pentru toate numerele întregi pozitive  $x$ .

(UNITED KINGDOM) BEN ELLIOTT

Fiecare dintre cele trei probleme valorează 7 puncte.

Timp de lucru  $4\frac{1}{2}$  ore.