

Problema 2. Calculați suma

$$1000^2 + 999^2 - 998^2 - 997^2 + 996^2 + 995^2 - 994^2 - 993^2 + \dots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2.$$

* * *

Soluția 1:

Grupăm cei 1000 de termeni în 250 de grupe de câte 4 astfel încât în fiecare grupă să avem o sumă de tipul $(4k + 4)^2 + (4k + 3)^2 - (4k + 2)^2 - (4k + 1)^2$, cu $k = 0, 1, 2, \dots, 249$.

În fiecare grupă, avem $(4k + 4)^2 + (4k + 3)^2 - (4k + 2)^2 - (4k + 1)^2 = (16k^2 + 32k + 16) + (16k^2 + 24k + 9) - (16k^2 + 16k + 4) - (16k^2 + 8k + 1) = 32k + 20$.

Prin urmare, suma de calculat este:

$$32 \cdot 0 + 20 + 32 \cdot 1 + 20 + 32 \cdot 2 + 20 + \dots + 32 \cdot 249 + 20 = 32(0 + 1 + 2 + \dots + 249) + 250 \cdot 20 = 16 \cdot 249 \cdot 250 + 5000 = 1001000.$$

Soluția 2:

Notăm cu S suma și avem:

$$S = 1000^2 - 998^2 + 999^2 - 997^2 + 996^2 - 994^2 + 995^2 - 993^2 + \dots + 4^2 - 2^2 + 3^2 - 1^2.$$

Folosind formula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, S devine

$$S = 2(1000 + 998) + 2(999 + 997) + 2(996 + 994) + 2(995 + 993) + \dots + 2(4 + 2) + 2(3 + 1),$$

adică

$$S = 2(1000 + 999 + 998 + 997 + 996 + 995 + 994 + 993 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1) = 1000 \cdot 1001 = 1001000.$$