Etapa 4, Problema 1

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt{a+bx}+\sqrt{b+cx}+\sqrt{c+ax}=\sqrt{b-ax}+\sqrt{c-bx}+\sqrt{a-cx}.$$

Laurențiu Panaitopol, ONM 1974

Soluție.

Evident, ecuația are soluția $x=0$.

Ecuația nu poate avea soluții pozitive: dacă x_0 ar fi o asemenea soluție, atunci $\sqrt{a+bx_0}>\sqrt{a-cx_0}$, $\sqrt{b+cx_0}>\sqrt{b-ax_0}$ și $\sqrt{c+ax_0}>\sqrt{c-bx_0}$ și, prin adunarea acestor inegalități, ajungem la contradicție cu egalitatea din enunț.

Analog se arată ca ecuația nu poate avea soluții negative, deci $x=0$ este singura soluție a ecuației date.