RELAŢII METRICE ÎN TRIUNGHIUL OARECARE

ABSTRACT. Articolul prezintă teorema lui Pitagora generalizată, teorema lui Stewart, iar de aici lungimea medianei şi lungimea bisectoarei într-un triunghi.

Lecţia se adresează elevilor din clasa a VII-a.

Data: februarie 2011

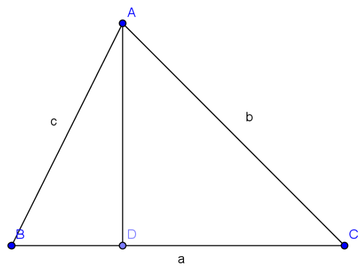
Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Toţi cunoaştem teorema lui Pitagora şi este clar pentru toată lumea că ea se aplică într-un triunghi dreptunghic.

În cele ce urmează vom arăta că o relaţie asemănătoare cu cea din teorema lui Pitagora putem stabili şi într-un triunghi oarecare. Această relaţie va deveni teorema lui Pitagora generalizată.

Pentru a uşura scrierea vom folosi următoarele notaţii.

Dacă ABC este un triunghi, atunci $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.



Dacă $AD \perp BC$, atunci $BD = pr_a c$ reprezintă proiecţia laturii AB pe dreapta BC, iar $CD = pr_a b$ reprezintă proiecţia laturii AC pe dreapta BC.

Acestea fiind spuse putem formula acum următoarea

Teoremă (Pitagora generalizată): Dacă ABC este un triunghi ascuţitunghic, atunci, cu notaţiile de mai sus avem

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot pr_a c$$

Demonstraţie: Vom folosi figura de mai sus. Construind înălţimea AD în triunghiul ABC obţinem două triunghiuri dreptunghice; ADC şi ADB.

Din $\triangle ADC$ $\left(m(\widehat{D}) = 90^0\right)$ avem

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 \ (*)$$

Din $\triangle ADB$ $\left(m(\widehat{D}) = 90^0\right)$ obţinem

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

Înlocuind în (*) rezultă

$$AC^2 = DC^2 + AB^2 - BD^2 \ (**)$$

Dacă avem în vedere că $DC = BC - BD$, relaţia (**) devine

$$AC^2 = (BC - BD)^2 + AB^2 - BD^2$$

care, în urma efectuării calculelor conduce la

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot BD$$

iar cu notaţiile anunţate mai sus obţinem

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot pr_a c.$$

Observaţia 1: Relaţia din teorema lui Pitagora generalizată este circulară, adică poate fi scrisă pentru oricare dintre laturi. Avem aşadar,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot pr_b c$$

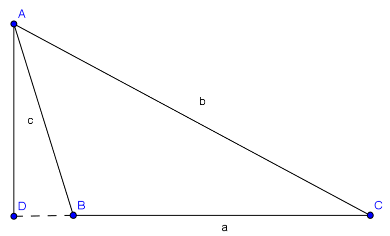
şi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot pr_a b.$$

Observaţia 2: Dacă latura pentru care vrem să aplicăm teorema lui Pitagora generalizată se opune unui unghi obtuz atunci relaţia devine

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a \cdot pr_a c.$$

deoarece, în acest caz $DC = BC + BD$.
(vezi figura de mai jos)



Teorema demonstrată mai sus ne permite să abordăm acum

Teorema lui Stewart: Fie A, C, B puncte coliniare, în această ordine, iar O un punct exterior dreptei AB. Atunci este adevărată relaţia

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC - OC^2 \cdot AB = AC \cdot CB \cdot AB$$

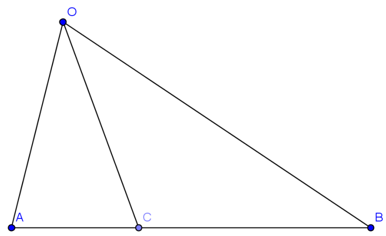
Demonstraţie: Vom demonstra folosind teorema lui Pitagora generalizată în $\triangle OAC$ şi $\triangle OCB$ (vezi figura de mai jos).

Din $\triangle OAC$ avem

$$OA^2 = AC^2 + OC^2 - 2 \cdot AC \cdot pr_{AC}OC, \ (*)$$

iar din $\triangle OBC$ avem

$$OB^2 = BC^2 + OC^2 + 2 \cdot BC \cdot pr_{BC}OC. \ (**)$$



Înmulţind relaţia (*) cu CB, relaţia (**) cu AC şi având în vedere că $pr_{AC}OC = pr_{BC}OC = pr_{AB}OC$ putem scrie

$$OA^2 \cdot CB = AC^2 \cdot CB + OC^2 \cdot CB - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot pr_{AB}OC$$
$$OB^2 \cdot AC = BC^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AC + 2 \cdot AC \cdot BC \cdot pr_{AB}OC$$

Adunând, membru cu membru, cele două relaţii obţinem

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC = AC^2 \cdot CB + BC^2 \cdot AC + OC^2 \cdot CB + OC^2 \cdot AC$$

de unde

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC = AC \cdot CB \cdot (AC + BC) + OC^2 \cdot (CB + AC)$$

Deoarece $AC + BC = AB$, ultima relaţie se scrie

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC = AC \cdot CB \cdot AB + OC^2 \cdot AB$$

sau

$$OA^2 \cdot CB + OB^2 \cdot AC - OC^2 \cdot AB = AC \cdot CB \cdot AB,$$

adică relaţia din enunţ.

Această teoremă ne permite acum să aflăm, în funcţie de lungimile laturilor, atât lungimea medianei într-un triunghi cât şi lungimea bisectoarei într-un triunghi.

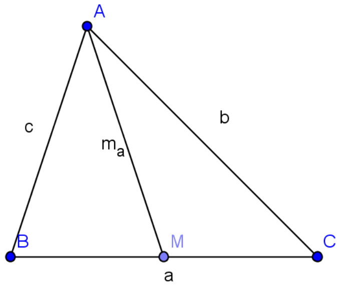
Problema 1 (Teorema medianei): În triunghiul ABC notăm $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ şi m_a lungimea medianei din A a triunghiului ABC. Atunci este adevărată relaţia

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$$

Soluţie: Vom aplica teorema lui Stewart pentru punctele coliniare B, M, C şi punctul exterior A.

Avem

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - AM^2 \cdot BC = BM \cdot MC \cdot BC.$$



Folosind notaţiile din enunţ şi faptul că $BM = MC = \frac{a}{2}$ vom putea scrie

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - m_a^2 \cdot a = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a.$$

Înmulţind relaţia cu $\frac{4}{a}$ obţinem

$$2c^2 + 2b^2 - 4m_a^2 = a^2$$

de unde rezultă relaţia din enunţ

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$$

Comentariu: Relaţii asemănătoare se pot scrie şi pentru medianele din B sau C. Aşadar

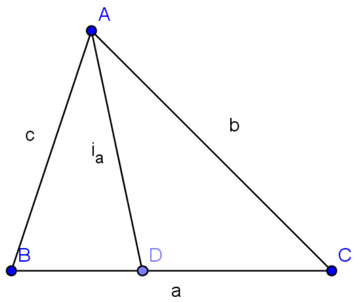
$$m_b^2 = \frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}$$
$$m_c^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}.$$

Problema 2 (Lungimea bisectoarei): În triunghiul ABC notăm $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ şi i_a lungimea bisectoarei unghiului A a triunghiului ABC. Atunci este adevărată relaţia

$$i_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

Soluţie: Înainte de a începe demonstraţia propriu-zisă să ne amintim teorema bisectoarei.

"Dacă AD este bisectoare în triunghiul ABC, $D \in (BC)$, atunci este adevărată relaţia $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$".



Folosind notaţiile din problemă avem

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b},$$

de unde vom scoate $DB = \dfrac{ac}{b+c}$ şi $DC = \dfrac{ab}{b+c}$.

Aplicăm acum teorema lui Stewart pentru punctele coliniare B, D, C şi punctul exterior A. Vom avea

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BD \cdot DC \cdot BC.$$

Cu notaţiile din enunţ şi calculele făcute mai sus avem

$$c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} - i_a^2 \cdot a = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot a$$

Înmulţind relaţia cu $\dfrac{(b+c)^2}{a}$ obţinem

$$c^2 b(b+c) + b^2 c(b+c) - i_a^2 (b+c)^2 = a^2 bc.$$

De aici putem scrie

$$i_a^2 (b+c)^2 = bc(b+c)^2 - a^2 bc$$

sau

$$i_a^2 (b+c)^2 = bc\left[(b+c)^2 - a^2\right].$$

În continuare avem

$$i_a^2 (b+c)^2 = bc(b+c+a)(b+c-a).$$

Deoarece $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ deducem $a+b+c = 2p$ şi $b+c-a = 2p-2a = 2(p-a)$. Cu acestea, ultima relaţie devine

$$i_a^2(b+c)^2 = 4bcp(p-a),$$

de unde

$$i_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2},$$

adică relaţia din enunţ.

Comentariu: Relaţii asemănătoare se pot scrie şi pentru bisectoarele unghiurilor B sau C. Aşadar

$$i_b^2 = \frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}$$
$$i_c^2 = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}$$