Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Avem n cartonaşe pe care sunt scrise numerele de la 1 la n şi n urne, şi ele numerotate de la 1 la n. În fiecare urnă se introduce câte unul din cartonaşe, apoi, pentru fiecare urnă, se face suma dintre numărul urnei şi cel scris pe cartonaşul aflat în urnă.
a) Arătaţi că dacă n este număr par, printre cele n sume calculate, vor exista două care dau acelaşi rest la împărţirea cu n.
b) Arătaţi că oricare ar fi $n > 2$ un număr natural impar, distribuirea cartonaşelor în urne se poate face în aşa fel încât cele n sume să dea resturi diferite la împărţirea cu n.

Soluţie:
Presupunem contrariul, anume că există un mod de a introduce cartonaşele în urne fără ca două dintre cele n sume să dea acelaşi rest la împărţirea cu n. Asta înseamnă că cele n sume dau resturile $0, 1, 2, \ldots, n-2$ şi $n-1$ la împărţirea cu n, deci suma celor n sume dă acelaşi rest ca şi $0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ la împărţirea cu n. Dacă $n = 2k$, această sumă este $k(2k-1) = 2k(k-1) + k$ şi dă restul $k = \dfrac{n}{2}$ la împărţirea cu n.
Pe de altă parte, suma celor n sume este de fapt $(1 + 2 + \ldots + n) + (1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)$ care este divizibilă cu n, prin urmare, presupunând concluzia falsă şi calculând în două moduri o anumită cantitate am obţinut rezultate diferite, contradicţie care arată că presupunerea făcută este falsă.

b) Putem introduce cartonaşele în urne în felul următor: cartonaşul cu numărul m merge în urna cu numărul m. Astfel, cele n sume vor fi 2, 4, 6, $\ldots$, $2n$. Aceste numere dau resturi diferite la împărţirea cu n deoarece, dacă $n \mid 2i - 2j$ cu $1 \leq j < i \leq n$, atunci $(n, 2) = 1$ implică $n \mid i - j$, ceea ce nu se poate deoarece $0 < i - j < n$.