Problema 3. În produsul

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2018$$

se elimină toate numerele pare şi toate numerele care au cifra unităţilor 5. Care este ultima cifră a produsului numerelor rămase?

* * *

Soluţie Produsul dat are 2018 factori. Trebuie văzut câţi factori rămân după eliminarea factorilor pari şi ai celor care au cifra unităţilor 5.

De la 1 până la 2018 sunt 1009 numere pare.

Factorii care au cifra unităţilor 5 sunt de forma $(2n-1) \cdot 5$, unde n este un număr natural nenul. Trebuie să avem

$$5 \leq (2n-1) \cdot 5 \leq 2018$$

adică

$$1 \leq 2n-1 \leq 403.$$

De aici

$$2 \leq 2n \leq 404$$

adică

$$1 \leq n \leq 202.$$

De la 1 la 202 sunt 202 numere, prin urmare avem 202 factori care au cifra unităţilor 5.

În concluzie, vom avea

$$2018 - 1009 - 202 = 807$$

factori care nu sunt pari şi nici nu au cifra unităţilor 5.

După eliminarea factorilor pari şi ai celor care au cifra unităţilor 5 avem produsul

$$1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2017.$$

Observăm că cifra unităţilor se repetă din patru în patru sub forma 1, 3, 7, 9.

Verdem de câte ori se repetă această secvenţă. Deoarece $807 : 4$ dă câtul 201 şi restul 3 înseamnă că secvenţa 1, 3, 7, 9 se repetă de 201 ori, iar la final avem 1, 3, 7.

Acum, deoarece $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9$ are ultima cifră 9, ultima cifră a produsul celor 201 secvenţe va fi aceeaşi cu ultima cifră a lui 9^{201}, adică 9.

Prin urmare ultima cifră a produsului $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2017$ va fi ultima cifră a produsului $9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7$, adică 9.