Problema 1. Pentru orice număr natural nenul n se defineşte „n *factorial*" ca fiind numărul

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

(Aşadar $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, ş.a.m.d.)
Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c, d, e, f pentru care

$$a! + b! + c! + d! + e! = f!.$$

Soluţie:
Să observăm mai întâi că numerele a, b, c, d, e trebuie să fie mai mici decât f.
Dacă $f \geq 6$, atunci $f! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (f-1)}_{=(f-1)!} \cdot f = (f-1)! \cdot f > (f-1)! \cdot 5 = (f-1)! + (f-1)! + (f-1)! + (f-1)! + (f-1)! \geq a! + b! + c! + d! + e!$, deci în acest caz egalitatea din enunţ nu poate avea loc.

Dacă $f = 5$, atunci $a! + b! + c! + d! + e! \leq 4! + 4! + 4! + 4! + 4! = 4! \cdot 5 = 5!$, deci egalitatea din enunţ are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = d = e = 4$ (în caz contrar inegalitatea este strictă). Obţinem astfel soluţia $\boxed{a = b = c = d = e = 4,\ f = 5}$.

Dacă $f = 4$, ar trebui să îl scriem pe $4! = 24$ ca sumă de cinci numere, numere care pot fi numai $1! = 1$, $2! = 2$ sau $3! = 6$. Dacă cel mult trei dintre termeni sunt egali cu 6, suma va fi cel mult $6+6+6+2+2 = 22 < 24$, iar dacă printre termenii sumei avem patru sau cinci egali cu 6, suma va fi cel puţin $6 + 6 + 6 + 6 + 1 = 25 > 24$. Aşadar nu avem soluţii cu $f = 4$.

Dacă $f = 3$, trebuie să îl scriem pe $3! = 6$ ca sumă de cinci numere, numere care pot fi numai $1! = 1$ sau $2! = 2$. Este evident că patru dintre numere trebuie să fie 1, iar al cincilea să fie 2, aşadar obţinem soluţiile:
$\boxed{a = b = c = d = 1,\ e = 2,\ f = 3}$, $\boxed{a = b = c = e = 1,\ d = 2,\ f = 3}$,
$\boxed{a = b = d = e = 1,\ c = 2,\ f = 3}$, $\boxed{a = c = d = e = 1,\ b = 2,\ f = 3}$ şi
$\boxed{b = c = d = e = 1,\ a = 2,\ f = 3}$.

Este evident că nu putem avea soluţii cu $f = 2$, deci ecuaţia are numai cele şase soluţii găsite mai sus.