Problema 2

Se consideră două numere natural nenule prime între ele m și n. Demonstrați că are loc egalitatea:

$$\left\{\left\{\frac{m}{n}\right\}; \left\{\frac{2m}{n}\right\}; \left\{\frac{3m}{n}\right\}; \dots ; \left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}\right\} = \left\{\frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots ; \frac{n-1}{n}\right\},$$

unde prin $\{a\}$ notăm partea fracționară a numărului real a.

Soluție.

Comform teoremei împărțirii cu rest pentru un număr k din mulțimea {1, 2, 3, …, n-1} avem q_k, r_k numere întregi unice astfel încât:

$$k \cdot m = n \cdot q_k + r_k,\ 0 \leq r_k \leq n - 1.$$

Evident că pentru i diferit de j avem r_i diferit de r_j, deci

$$\left\{\frac{km}{n}\right\} = \left\{\frac{nq_k + r_k}{n}\right\} = \left\{q_k + \frac{r_k}{n}\right\} = q_k + \frac{r_k}{n} - \left[q_k + \frac{r_k}{n}\right] = q_k + \frac{r_k}{n} - q_k = \frac{r_k}{n}.$$

Prin urmare când k parcurge mulțimea {1, 2, 3, … , n - 1}, r_k parcurge aceeași mulțime, prin urmare are loc:

$$\left\{\left\{\frac{m}{n}\right\}; \left\{\frac{2m}{n}\right\}; \left\{\frac{3m}{n}\right\}; \dots ; \left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}\right\} = \left\{\frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots ; \frac{n-1}{n}\right\},$$