Clasa a X-a - Etapa 2

Problema 4. *Fie* $(b_n)_{n\geq 1}$ *o progresie geometrică cu proprietatea că* $b_n \geq 1$, *pentru orice* $n \geq 1$. *Demonstraţi că*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lg b_k}{n} \leq \lg \frac{b_1 + b_n}{2},$$

pentru orice număr natural nenul n.

Soluţie: Dacă notăm $a_n = \lg b_n$, pentru $n \geq 1$, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ devine progresie aritmetică. Atunci

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lg b_k}{n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{\lg b_1 + \lg b_n}{2},$$

iar

$$\frac{\lg b_1 + \lg b_n}{2} \leq \lg \frac{b_1 + b_n}{2},$$

din concavitatea funcţiei logaritm zecimal.