**Problema 3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^3 - 3xy + y^3 = 3$.

prelucrare după *Lucian Tuţescu*, problema E:14699

*Soluţie:* Notând $x+y = s$ şi $xy = p$, avem $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = s(s^2-3p)$, deci ecuaţia revine la $s^3 - 3sp - 3p = 3$, de unde $3p(s+1) = s^3 - 3$. Cum $s = -1$ nu verifică, rezultă $3p = \dfrac{s^3-3}{s+1} = \dfrac{s^3+1-4}{s+1} = s^2 - s + 1 - \dfrac{4}{s+1}$. Deoarece $p$ trebuie să fie întreg, trebuie ca $s+1 \mid 4$, adică $s+1 \in D_4 = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$, de unde $s \in \{-5, -3, -2, 0, 1, 3\}$. Pe de altă parte, trebuie ca $3 \mid s^3 - 3$, adică $3 \mid s$. Deducem că $s \in \{-3, 0, 3\}$. Corespunzător acestor valori se găseşte $p = 5$, $p = -1$, respectiv $p = 2$. Dar $s^2 = (x+y)^2 \geq 4xy = 4p$ este o condiţie necesară pe care nu o respectă decât ultimele două perechi: $(s,p) = (0,-1)$ (care conduce la $\{x,y\} = \{-1,1\}$) şi $(s,p) = (3,2)$ (care conduce la $\{x,y\} = \{1,2\}$).

În concluzie, soluţiile ecuaţiei sunt $(x,y) \in \{(-1,1), (1,-1), (1,2), (2,1)\}$.