

CONCURSUL VIITORI OLIMPICI

MIHAI MONEA, GABRIEL POPA

REZUMAT. Acest material are scop prezentarea subiectelor propuse la etapa finală a Concursului Viitori Olimpici, în edițiile 2010 - 2016

INTRODUCERE. Faza finală a Concursului *Gazeta Matematică și Viitori Olimpici*, găzduit în ultimii ani de frumosul oraș Câmpulung Muscel, adună în a doua jumătate a lunii august pe cei care, de-a lungul unui an școlar, se dovedesc a fi buni rezolvitori ai problemelor publicate pe site-ul ViitoriOlimpici.ro, precum și în *Gazeta Matematică*. În tabără, acești elevi au de rezolvat trei probleme, una fiind selectată dintre cele publicate pe site și alta din ultimele numere ale *Gazetei*. În plus, concurenții susțin o probă orală.

Prezentăm în continuare subiectele propuse participanților la cele șapte ediții precedente. Urăm succes actualilor concurenți, în confruntarea cu problemele ediției a opta!

1. EDIȚIA I -17 AUGUST 2010

Problema 1. Arătați că orice submulțime cu $7n+1$ elemente a mulțimii $\{1, 2, \dots, 8n\}$ conține patru numere a, b, c și d astfel încât $a|b$, $b|c$ și $c|d$.

Soluție. Considerăm submulțimile mulțimii $\{1, 2, \dots, 8n\}$ de forma

$$C_k = \{2k-1, 2(2k-1), 2^2(2k-1), \dots\}, k = \overline{1, 4n}.$$

Submulțimile $C_{2n+1}, C_{2n+3}, \dots, C_{4n}$ conțin câte un singur element. În total, aceste $2n$ submulțimi au $2n$ elemente. Submulțimile $C_{n+1}, C_{n+2}, \dots, C_{2n}$ conțin câte două elemente, deci, în total, aceste n submulțimi au $2n$ elemente.

Rămân $3n+1$ elemente în submulțimile C_1, C_2, \dots, C_n , ceea ce înseamnă, conform principiului cutiei, că măcar una dintre aceste mulțimi conține patru elemente. În acest moment, concluzia se impune. \square

Problema 2. Pe o tablă $2n \times 2n$ se află pietre albe și pietre roșii, cel mult o piatră în fiecare pătrat 1×1 . Se execută următoarele operații:

(i) de pe fiecare coloană pe care se află o piatră albă se elimină toate pietrele roșii;

(ii) de pe fiecare linie pe care a rămas o piatră roșie se elimină toate pietrele albe.

Arătați că dintr-una dintre culori au rămas cel mult n^2 pietre.

OLIMPIADĂ RUSIA

Date: 28 Martie 2017.

Soluție. După executarea celor două operații, rămân doar linii și coloane monocolor. Fie l_a numărul de linii albe (adică cele care conțin doar pietre albe), l_r numărul de linii roșii, c_a numărul de coloane albe și c_r numărul de coloane roșii. Numărul de pietre albe poate fi, în final, cel mult $l_a \cdot c_a$, iar cel de pietre roșii cel mult $l_r \cdot c_r$. Este suficient să arătăm că $l_a \cdot c_a \leq n^2$ sau $l_r \cdot c_r \leq n^2$.

Dacă $l_a + c_a \leq 2n$, atunci

$$l_a \cdot c_a \leq l_a(2n - l_a) = n^2 - (n - l_a)^2 \leq n^2.$$

Dacă $l_a + c_a > 2n$, rezultă că

$$l_r + c_r = 4n - (l_a + c_a) \leq 2n$$

și, ca mai sus, $l_r \cdot c_r \leq n^2$. □

Problema 3. Șirul de numere naturale $(x_n)_{n \geq 0}$ este definit prin $x_0 = x_1 = 1$ și

$$x_{n+1} = 14x_n - x_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că, pentru fiecare număr natural n , numărul $2x_n - 1$ este pătrat perfect.

VIITORIOOLIMPICI.RO

Soluție. Soluțiile ecuației caracteristice sunt

$$t_{1,2} = (2 \pm \sqrt{3})^2.$$

Termenul general al șirului are forma

$$x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$$

și, ținând seama de condiția $x_0 = x_1 = 1$, identificăm constantele c_1 și c_2 ; obținem

$$x_n = \frac{1}{4} \left((2 + \sqrt{3})^{2n-1} + (2 - \sqrt{3})^{2n-1} \right).$$

Dar $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \pm 1)^2$, deci vom avea

$$\begin{aligned} 2x_n - 1 &= \frac{1}{2^{2n}} \left((\sqrt{3} + 1)^{4n-2} + (\sqrt{3} - 1)^{4n-2} \right) - 1 \\ &= \left(\frac{(1 + \sqrt{3})^{2n-1} + (1 - \sqrt{3})^{2n-1}}{2^n} \right)^2. \end{aligned}$$

Rămâne de arătat că numărul din paranteza este natural. Evident că acest număr este rațional, iar divizibilitatea cu 2^n se dovedește, de exemplu, prin inducție, folosind faptul că expresia de la numărător, fie ea a_{2n-1} , satisface relația de recurență $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$. □

2. EDIȚIA A II-A - 19 AUGUST 2011

Problema 1. Se consideră numerele reale a_1, a_2, a_3 și numerele complexe nenule z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1.$$

Determinați valorile posibile ale numărului $|a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3|$.

VIITORIOLIMPICI.RO

Soluție. Avem că

$$z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_3^2 z_2 = z_1 z_2 z_3.$$

Prin conjugarea relației $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, obținem că $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} = 1$, de unde $\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 1$, adică

$$z_3^2 z_1 + z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 = z_1 z_2 z_3.$$

Din aceste două egalități deducem că $\sum z_1^2 z_3 - z_3^2 z_1 = 0$, prin urmare

$$(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0.$$

Rezultă că sunt posibile doar următoarele trei situații:

- 1) $z_1 = z_2 \Rightarrow z_1^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_3 = \pm iz_1 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + a_3^2}$;
 - 2) $z_2 = z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_1 = \pm iz_3 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_3 + a_2)^2 + a_1^2}$;
 - 3) $z_1 = z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = 0 \Rightarrow z_2 = \pm iz_1 \Rightarrow |a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3| = \sqrt{(a_3 + a_1)^2 + a_2^2}$.
-

Problema 2. Se consideră $n \geq 3$ puncte, oricare trei necoliniare. Se trasează $C_{n-1}^2 + 1$ segmente având capetele în puncte dintre cele considerate. Arătați că oricare două puncte pot fi unite printr-o linie poligonală formată din segmente trasate.

MARIUS PERIANU

Soluție. Presupunem prin absurd ca există două puncte A și B care nu pot fi unite printr-o linie poligonală formată din segmentele trasate. Notăm cu $V(A)$ mulțimea punctelor care pot fi unite prin linii poligonale cu A (inclusiv punctul A) și fie $k = |V(A)|$ numărul de vârfuri. Deoarece $B \notin V(A)$, rezultă $k \leq n - 1$.

Arătăm că celelalte $n - k$ puncte nu sunt unite prin segmente cu puncte din $V(A)$. Într-adevăr, dacă $C \in V(A)$, $D \notin V(A)$ și punctele C, D sunt unite printr-un segment, atunci o linie poligonală de la A la C se poate prelungi la o linie poligonală de la A la D , contradicție cu $D \notin V(A)$.

Astfel, numărul segmentelor netrasate (numărul perechilor de puncte între care nu s-a trasat un segment) este $N \geq k(n - k) \geq n - 1$, iar al celor trasate este $C_{n-1}^2 + 1$.

În total, am avea cel puțin $n - 1 + C_{n-1}^2 + 1 = n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = C_n^2 + 1$ segmente, ceea ce este fals, deoarece între n puncte se pot trasa C_n^2 segmente. □

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_{\varphi(n)}$ toate numerele relativ prime cu n , mai mici decât n . Arătați că numerele $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$ sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă n este 6 sau număr prim sau o putere a lui 2.

LAURENȚIU PANAITOPOL

Soluție. Dacă $n \in \{6\} \cup \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ sau este număr prim, atunci

$$a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$$

sunt în progresie aritmetică.

Reciproc, dacă $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}$ sunt în progresie aritmetică, atunci:

a) dacă $\varphi(n) = 1$, atunci $n = 2$, iar dacă $\varphi(n) = 2$, atunci $n = 3, 4, 6$;

b) dacă $\varphi(n) \geq 3$, avem situațiile:

- dacă $a_2 = 2$, atunci n este prim;
- dacă $a_2 = 3$, atunci $a_k = 2k - 1$, $k = \overline{1, \varphi(n)}$, de unde rezultă că n este o putere a lui 2;
- dacă $a_2 \geq 4$, atunci, deoarece $a_2 > 3$, rezultă $3 \mid n$ și $3 \nmid a_2$. Dar $a_3 = 2a_2 - a_1 = 2a_2 - 1$, și cum $3 \nmid a_3$, rezultă $a_2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Dar $n - 1 = a_{\varphi(n)} = a_1 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - a_1) = 1 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - 1)$, deci $n = 2 + (\varphi(n) - 1)(a_2 - 1)$. De aici, cum $a_2 \equiv 1 \pmod{3}$, rezultă că $n \equiv 2 \pmod{3}$, fals, întrucât $3 \mid n$. \square

3. EDIȚIA A III-A - 22 AUGUST 2012

Problema 1. Spunem că un număr complex z are proprietatea P dacă există m_z, n_z numere naturale, nu ambele nule, astfel încât

$$z^{m_z} = (1 + z)^{n_z} = 1.$$

a) Determinați numerele complexe cu proprietatea P ;

b) Pentru fiecare z cu proprietatea P , determinați perechile (m_z, n_z) corespunzătoare pentru care $m_z + n_z = 2012$.

VIITORIOOLIMPICI.RO

Soluție. a) Fie $\zeta_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ rădăcina primitivă de ordin n a unității. Elementele mulțimilor $A_n = \{\zeta_n - 1, \zeta_n^2 - 1, \dots, \zeta_n^{n-1} - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ au proprietatea P (luăm $m_z = 0$). De asemenea, elementele mulțimilor

$$B_m = \{1, \zeta_m, \zeta_m^2, \dots, \zeta_m^{m-1}\} \setminus \{-1\},$$

$m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ au proprietatea P (luăm $n_z = 0$).

În cazul în care m_z, n_z sunt ambele nenule, atunci $z \in C(O, 1) \cap C(M, 1)$, unde M este punctul de afix -1 , prin urmare $z \in \{\zeta_3, \zeta_3^2\}$. În concluzie, numerele complexe care au proprietatea P sunt cele din

$$\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^{\infty} B_m \right).$$

b) Dacă $n \geq 2$ este divizor al lui 2012 și $z \in A_n$, atunci $(m_z, n_z) = (0, 2012)$; pentru celelalte elemente din $\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ nu există perechi (m_z, n_z) cu proprietatea cerută. La fel, dacă $m \geq 2$ este divizor al lui 2012 și $z \in B_m$, atunci $(m_z, n_z) = (2012, 0)$

; pentru celelalte elemente din $\bigcup_{m=2}^{\infty} B_m$ nu există perechi (m_z, n_z) cu proprietatea cerută.

Dacă $z \in \{\zeta_3, \zeta_3^2\}$, nu există perechi (m_z, n_z) cu ambele componente nemule: suma $m_z + n_z$ se divide cu 3, în timp ce 2012 nu se divide cu 3. \square

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O . Dacă $P \in [AD]$, demonstrați că există punctele $M \in [AB]$ și $N \in [BC]$ astfel încât O este ortocentrul triunghiului MNP dacă și numai dacă $3AP \geq 2AD$.

GABRIEL POPA & PAUL GEORGESCU

Soluție. Raportăm planul la un reper cartezian astfel încât

$$O(0, 0); A(-1, -1); B(1, -1); C(1, 1); D(-1, 1).$$

Fie $M(a, -1), N(1, b), P(-1, c)$ puncte cu proprietatea că O este ortocentrul triunghiului MNP . Din $OP \perp MN$ și $OM \perp PN$ rezultă că $\vec{OP} \cdot \vec{MN} = 0$, respectiv $\vec{OM} \cdot \vec{PN} = 0$. Cum $\vec{OP}(-1, c), \vec{MN}(1-a, b+1), \vec{OM}(a, -1), \vec{PN}(2, b-c)$, obținem că $a-1+bc+c=0$, respectiv $2a-b+c=0$. Eliminând a între cele două relații, deducem că $2-c=b(2c+1)$.

Situația $c = -\frac{1}{2}$ conduce la o contradicție, deci putem scrie $b = \frac{2-c}{2c+1}$. Impunem condiția $-1 \leq b \leq 1$ și rezultă că $c \in [\frac{1}{3}, 1]$, prin urmare $3AP \geq 2AD$.

Reciproc, să presupunem că $3AP \geq 2AD$, adică $c \in [\frac{1}{3}, 1]$. Atunci $b = \frac{2-c}{2c+1} \in [-1, 1]$, iar $a = \frac{b-c}{2} = \frac{1-c-c^2}{2c+1} \in [-1, 1]$, după cum se constată ușor. Punctele $M(\frac{1-c-c^2}{2c+1}, -1)$ și $N(1, \frac{2-c}{2c+1})$ completează un triunghi MNP al cărui ortocentru este O . \square

Problema 3. Demonstrați că nu există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care să fie îndeplinite, simultan, condițiile:

- (i) $f(1) = 1$;
- (ii) există $M > 0$ astfel încât $-M \leq f(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$;
- (iii) $f(x + \frac{1}{x^2}) = f(x) + (f(\frac{1}{x}))^2, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

OLIMPIADĂ IRAN

Soluție. Luând $x = 1$ în (iii) obținem că $f(2) = 2$, prin urmare $M \geq 2$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ cel mai mic număr natural cu proprietatea că $f(x) < n, \forall x \in \mathbb{R}^*$; avem că $n > 2$.

Putem găsi $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(a) \geq n-1$ și atunci

$$\left(f\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2 = f\left(a + \frac{1}{a^2}\right) - f(a) < n - (n-1) = 1,$$

prin urmare $f(\frac{1}{a}) > -1$. Aplicând (iii) pentru $x = \frac{1}{a}$, obținem că

$$(n-1)^2 \leq (f(a))^2 = f\left(\frac{1}{a} + a^2\right) - f\left(\frac{1}{a}\right) < n-1.$$

Deducem că $n \in \{1, 2\}$ și astfel am ajuns la o contradicție. \square

4. EDIȚIA A IV-A - 23 AUGUST 2013

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule n pentru care se poate construi o mulțime de numere complexe M , având n elemente, cu proprietățile:

- (i) $|z| = 1$, oricare ar fi $z \in M$;
- (ii) $\sum_{z \in M} z = 0$;
- (iii) $z + w \neq 0$, oricare ar fi $z, w \in M$.

VIITORIOOLIMPICI.RO

Soluție. Evident, valorile $n = 1$ și $n = 2$ nu convin. Orice număr impar $n \geq 3$ este bun: alegem $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

Valoarea $n = 4$ nu convine: dacă $M = \{a, b, c, d\}$, atunci a, b, c, d vor fi afixele vârfurilor unui patrulater inscriptibil $ABCD$. Notăm cu $P(p)$ și $Q(q)$ mijloacele laturilor AB , respectiv CD . Cum $2p = a + b$ și $2q = c + d$, condiția $a + b + c + d = 0$ arată că O este mijlocul segmentului PQ . Diametrul care trece prin mijlocul unei coarde (care nu este ea însăși diametru) este perpendicular pe acea coardă, prin urmare PQ este perpendiculară atât pe AB , cât și pe CD și O se află la egală distanță de aceste două coarde. Rezultă că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi, ceea ce contrazice (iii).

Orice număr par $n \geq 6$ este bun: alegem

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{n-3} = 1\} \cup \{wz \mid z^3 = 1\},$$

unde $w = \cos \alpha + i \sin \alpha$, cu $\alpha \notin \{r\pi \mid r \in \mathbb{Q}\}$.

în concluzie, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 4\}$. □

Problema 2.

a) Fie $ABCD$ un patrulater convex. Arătați că discurile având ca diametre laturile AB , BC , CD și DA acoperă în întregime interiorul patrulaterului $ABCD$.

GAZETA MATEMATICĂ 6-7-8/2013

b) Fie $ABCD$ un patrulater. Demonstrați că discurile având ca diametre segmentele AB , AC și AD acoperă în întregime interiorul triunghiului BCD .

Soluție. a) Fie M un punct în interiorul patrulaterului $ABCD$; atunci

$$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle DMA = 360^\circ.$$

Rezultă că cel puțin unul dintre cele patru unghiuri are măsura de măcar 90° . Dacă $\angle AMB$ este un astfel de unghi, M aparține discului de diametru AB și, de aici, cerința problemei.

b) Notăm cu P , Q și R proiecțiile vârfului A pe dreptele BC , CD respectiv DB . Indiferent de natura patrulaterului $ABCD$ (convex sau concav), patrulaterul de vârfuri $BPAR$, $CPAQ$ și $DQAR$ sunt înscrise în cercurile de diametre AB , AC respectiv AD și, împreună cu interioarele lor, acoperă interiorul triunghiului BCD . Cu atât mai mult, discurile având ca diametre segmentele AB , AC și AD vor acoperi interiorul triunghiului BCD . □

Soluție alternativă. Vom demonstra mai întâi următoarea: □

Lemă. Dacă ABC este un triunghi oarecare, discurile având ca diametre laturile AB și AC acoperă în întregime interiorul triunghiului.

Demonstrația lemei. Fie D proiecția punctului A pe dreapta BC . Dacă D se află în interiorul segmentului BC , atunci interiorul tringhiului ABD este acoperit de discul de diametru AB iar interiorul tringhiului ACD este acoperit de discul de diametru AC . Dacă D se află pe semidreapta opusă semidreptei $(BC, \text{interiorul tringhiului } ABC \text{ este acoperit de discul de diametru } AC$. în sfârșit, dacă D se află pe semidreapta opusă semidreptei $(CB, \text{interiorul tringhiului } ABC \text{ este acoperit de discul de diametru } AB$; cu aceasta, demonstrația lemei este completă.

Ambele cerințe ale problemei sunt simple consecințe ale lemei. La b), se impune tratarea separată a cazului în care interiorul triunghiului BCD nu este inclus în interiorul patrulaterului $ABCD$. \square

Problema 3. Se dau m numere naturale distincte din mulțimea $\{1; 2; \dots; n\}$. Demonstrați că putem alege câteva dintre ele, cu suma S , astfel încât

$$0 \leq S - \frac{m(m+1)}{2} \leq n + \sqrt{2n} - m.$$

ADRIAN ZAHARIUC

Soluție. Fie $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ cele m numere date. Notăm cu j indicele minim pentru care

$$a_1 + a_2 + \dots + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}$$

și cu i indicele maxim pentru care

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_j \geq \frac{m(m+1)}{2}.$$

Notând $S = a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$, este îndeplinită prima inegalitate.

Din maximalitatea lui i , avem

$$S \leq a_i + \frac{m(m+1)}{2} - 1. \quad (1)$$

Din minimalitatea lui j , deducem că

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} < \frac{m(m+1)}{2} \leq a_i + \dots + a_{j-1} + a_j \Rightarrow$$

$$a_j > a_1 + \dots + a_{i-1} \geq 1 + 2 + \dots + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2}.$$

Dar $n \geq a_j$, și prin urmare $i < \sqrt{2n} + 1$. Rezultă că

$$a_i \leq n - m + i < n - m + \sqrt{2n} + 1. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) obținem că, pentru S , este îndeplinită (strict) și a doua inegalitate din enunț. \square

5. EDIȚIA A V-A - 27 AUGUST 2014

Problema 1. Considerăm numerele complexe a, b, c , având același modul. Arătați că

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right| + \left| \frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right| + \left| \frac{b}{c} - \frac{c}{b} \right| \leq 3\sqrt{3}.$$

VIITORIOOLIMPICI.RO

Soluție. Fie $|a| = |b| = |c| = \rho$. Atunci

$$\sum \left| \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right| = \sum \left| \frac{a^2 - b^2}{ab} \right| = \frac{1}{\rho^2} \sum |a^2 - b^2|.$$

Se consideră punctele $A(a^2)$, $B(b^2)$ și $C(c^2)$. Ele sunt situate pe cercul cu centrul în origine și raza ρ^2 . Relația din enunț se rescrie sub forma

$$AB + BC + CA \leq 3\rho^2\sqrt{3}.$$

Vom arăta că în orice triunghi ABC , înscris în cercul de rază R , este adevărată inegalitatea

$$AB + BC + CA \leq 3R\sqrt{3}.$$

Într-adevăr, via teorema sinusurilor, relația precedentă revine la

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

iar acest fapt rezultă din inegalitatea lui Jensen aplicată funcției concave

$$\sin : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}.$$

□

Problema 2. Determinați numerele reale $x \in (\log_5 2, +\infty)$ cu proprietatea că

$$(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = (5^x - 2)^{\log_3 5}.$$

GAZETA MATEMATICĂ 6-7-8/2014

Soluție. Ecuația din enunț se poate scrie sub forma

$$3^{\log_5(3^x+2)} + 2 = 5^{\log_3(5^x-2)}.$$

Cu notațiile $y = \log_5(3^x + 2)$ și $z = \log_3(5^x - 2)$, obținem $3^y + 2 = 5^z$. Deducem că $x = \log_5(3^z + 2)$ și $z = \log_5(3^y + 2)$. Fie funcția

$$f : (\log_5 2, +\infty) \rightarrow (\log_5 2, +\infty), f(t) = \log_5(3^t + 2).$$

Atunci $f(x) = y, f(y) = z, f(z) = x$.

Funcția f este strict crescătoare, obținându-se prin compunere de funcții strict crescătoare. Din considerente de simetrie circulară, putem presupune fie că $x \leq y \leq z$, fie că $x \geq y \geq z$; ne plasăm în primul caz, cel de-al doilea tratându-se similar. Rezultă că $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, adică $y \leq z \leq x$ și, de aici, $x = y = z$. □

Problema 3.

a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că inegalitatea $|\cos nx| \leq n|\cos x|$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că inegalitatea $|\cos nx| \leq n|\cos x|$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

GHEORGHE IUREA

Soluție. Pentru $x \in \mathbb{R}$, considerăm

$$P(n) :: |\cos nx| \leq n|\cos x|.$$

Presupunând că $P(n)$ este adevărată, vom arăta că și $P(n+2)$ este adevărată. Avem:

$$\begin{aligned} |\cos(n+2)x| &= |\cos nx \cdot \cos 2x - \sin nx \cdot \sin 2x| \leq \\ &\leq |\cos nx| \cdot |\cos 2x| + 2|\sin x| \cdot |\cos x| \cdot |\sin nx| \leq \\ &\leq |\cos nx| + 2|\cos x| \leq n|\cos x| + 2|\cos x| = (n+2)|\cos x|. \end{aligned}$$

a) Pentru n par, $P(n)$ nu poate fi adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$; de exemplu, pentru $x = \frac{\pi}{2}$, am obține $1 \leq 0$, fals. Cum $P(1)$ este adevărată (cu egalitate) pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru n impar, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) $P(n)$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru acele valori ale lui x pentru care este adevărată $P(2)$; avem deci de rezolvat inecuația $|\cos 2x| \leq 2|\cos x|$. Notând $c = |\cos x| \in [0, 1]$, aceasta revine la $-2c \leq 2c^2 - 1 \leq 2c, c \in [0, 1]$. Deducem că $c \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right]$. În final, obținem soluțiile

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}, n\pi + \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right].$$

□

6. EDIȚIA A VI-A - 20 AUGUST 2015

Problema 1. Notăm cu \mathcal{F} mulțimea funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y),$$

oricare ar fi numerele reale x și y .

a) Determinați funcțiile injective din \mathcal{F} .

b) Determinați funcțiile surjective din \mathcal{F} .

VIITORIOLIMPICI.RO

Soluție. a) Relația din ipoteză conduce la $f(f(x) + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $f(f(y) + x) = f(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Obținem imediat că

$$f(f(x) + y) = f(f(y) + x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Deoarece f este injectivă, rezultă că

$$f(x) + y = f(y) + x \iff f(x) - x = f(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - t$. Funcția g verifică relația $g(x) = g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, așadar există $a \in \mathbb{R}$ pentru care $g(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}$.

În concluzie, funcțiile căutate sunt cele de forma

$$f(x) = x + a, \forall x \in \mathbb{R}$$

și se verifică faptul că aceste funcții sunt soluții ale problemei.

b) Fie f o funcție surjectivă din \mathcal{F} ; vom arăta că f este și injectivă. Pentru aceasta, fie $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $f(a) = f(b)$. Din ipoteză, avem că

$$f(f(x)) = f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Există $c, d \in \mathbb{R}$ pentru care $f(c) = a$ și $f(d) = b$. Înlocuind $x = c$, apoi $x = d$ în relația anterioară, obținem $f(a) = a + f(0)$, respectiv $f(b) = b + f(0)$. Din $f(a) = f(b)$ rezultă că $a + f(0) = b + f(0)$, deci $a = b$.

Prin urmare, funcțiile surjective sunt injective și regăsim soluțiile de la punctul anterior. \square

Problema 2. Considerăm două numere complexe u și v , având același modul, pentru care există a, b, c și d numere reale strict pozitive astfel încât $\max\{a, b, c\} < d$, $a + d = b + c$ și

$$|au + dv| \leq |bu + cv|.$$

Demonstrați că $u = v$.

GAZETA MATEMATICĂ 6-7-8/2015

Soluție. Ultima relație din ipoteză se scrie succesiv:

$$\begin{aligned} & |au + dv|^2 \leq |bu + cv|^2 \\ \Leftrightarrow & (au + dv)(a\bar{u} + d\bar{v}) \leq (bu + cv)(b\bar{u} + c\bar{v}) \\ \Leftrightarrow & (a^2 + d^2)|u|^2 + ad(u\bar{v} + \bar{u}v) \leq (b^2 + c^2)|u|^2 + bc(u\bar{v} + \bar{u}v) \\ \Leftrightarrow & (a + d)^2|u|^2 - 2ad|u|^2 + ad(u\bar{v} + \bar{u}v) \leq (b + c)^2|u|^2 - 2bc|u|^2 + bc(u\bar{v} + \bar{u}v) \\ \Leftrightarrow & ad(u\bar{v} + \bar{u}v - 2|u|^2) \leq bc(u\bar{v} + \bar{u}v - 2|u|^2) \\ \Leftrightarrow & (ad - bc)(u\bar{v} + \bar{u}v - |u|^2 - |v|^2) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (bc - ad)|u - v|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Pe de altă parte, este adevărată inegalitatea $bc > ad$. Într-adevăr, putem presupune $b \leq c$ și, cum $d - c = b - a \stackrel{\text{not}}{=} r > 0$, avem:

$$ad = (c + r)(b - r) = bc - r(c - b) - r^2 < bc.$$

Rezultă astfel că $|u - v|^2 = 0$ și, de aici, concluzia problemei. \square

Soluție alternativă. Notăm $k = \frac{d}{a+d}$ și $l = \frac{c}{b+c}$; relația din enunț se poate scrie sub forma

$$(1) \quad |(1 - k)u + kv| \leq |(1 - l)u + lv|.$$

Presupunem, prin absurd, că $u \neq v$. În planul complex de origine $O(0)$, considerăm punctele (distincte, conform presupunerii asumate!) $A(u)$, $B(v)$, $M((1 - k)u + kv)$ și $N((1 - l)u + lv)$. Evident, punctele M și N sunt interioare segmentului AB . În plus, deoarece $k > l$ și $k > 1 - l$, punctul N este situat între punctele M și M' , unde M' este simetricul lui M față de mijlocul segmentului AB . Rezultă că $OM > ON$, prin urmare (2) $|(1 - k)u + kv| > |(1 - l)u + lv|$. Relațiile (1) și (2) fiind contradictorii, rămâne adevărată concluzia problemei. \square

Problema 3. Demonstrați că singurul număr natural $n \geq 2$ cu proprietatea că

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} \geq \sqrt[n]{abc},$$

oricare ar fi numerele reale nenegative a, b și c , este $n = 14$.

GABRIEL POPA & PAUL GEORGESCU

Soluție. Pentru început, demonstrăm valabilitatea inegalității pentru cazul $n = 14$. Formula de dezvoltare a binomului conduce la

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k \geq C_n^{n-1} x y^{n-1} = n x y^{n-1}, \forall x, y \in [0, \infty), \forall n \geq 2.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} \right)^{14} &= \left(a + \sqrt{b + \sqrt{c}} \right)^7 \geq 7a \left(\sqrt{b + \sqrt{c}} \right)^6 \\ &= 7a (b + \sqrt{c})^3 \geq 21abc \geq abc, \end{aligned}$$

de unde obținem

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} \geq \sqrt[14]{abc}, \forall a, b, c \in [0, \infty).$$

Demonstrăm acum că, oricare ar fi $n \geq 2, n \neq 14$, există valori $a, b, c \in [0, \infty)$ pentru care inegalitatea din enunț este falsă. Considerând $a = x^2, b = x^4$ și $c = x^8$, unde $x \geq 0$, un număr n care are proprietatea dorită trebuie să verifice inegalitatea

$$(\star) \quad x \sqrt{1 + \sqrt{2}} \geq x^{\frac{14}{n}}, \forall x \in [0, \infty).$$

Dacă $n < 14$, relația (\star) conduce la

$$\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}} \right)^{\frac{n}{14-n}} \geq x, \forall x \in (0, \infty),$$

ceea ce nu este posibil (valorile mari ale lui x conduc la contradicții). Dacă $n > 14$, relația (\star) conduce la

$$x^{\frac{n-14}{n}} \geq \sqrt{\sqrt{2} - 1}, \forall x \in (0, \infty),$$

fapt care, din nou, nu este adevărat (valorile apropiate de 0 ale lui x conduc la contradicții). \square

7. EDIȚIA A VII-A - 17 AUGUST 2016

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$, astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{\log_{a_1}^2 a_2}{na_1 + n - 1} + \frac{\log_{a_2}^2 a_3}{na_2 + n - 1} + \dots + \frac{\log_{a_n}^2 a_1}{na_n + n - 1} \geq 1.$$

GAZETA MATEMATICĂ

Soluție. Pentru început avem

$$\begin{aligned} & \frac{\log_{a_1}^2 a_2}{na_1 + n - 1} + \frac{\log_{a_2}^2 a_3}{na_2 + n - 1} + \dots + \frac{\log_{a_n}^2 a_1}{na_n + n - 1} \\ & \geq \frac{(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1)^2}{na_1 + n - 1 + \dots + na_n + n - 1} \\ & = \frac{(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1)^2}{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n^2 - n} \\ & = \left(\frac{\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

.....
 Ipoteza conduce la concluzia că numerele $\log_{a_1} a_2, \log_{a_2} a_3, \dots, \log_{a_n} a_1$ sunt pozitive, deci putem aplica inegalitatea mediilor. Apoi avem

$$\begin{aligned} \frac{\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1}{n} & \geq \sqrt[n]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_n} a_1} \\ & = \sqrt[n]{\log_{a_1} a_1} = 1, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la concluzia problemei. □

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Câte numere naturale de n cifre, formate doar cu cifrele 1, 9, 8, 6, sunt divizibile cu 3?

VIITORI OLIMPICI.RO, 2015-2016

Soluție. Fie x_n numărul căutat; evident că $x_1 = 2$.

Dacă A este un număr de $n + 1$ cifre ca în enunț, suma primelor n cifre ale lui A poate fi de forma $3k, 3k + 1$ sau $3k + 2$. În cazul în care suma primelor n cifre este de forma $3k$, mai putem completa doar cu 6 sau 9, deci avem $2x_n$ posibilități de alegere pentru A . Dacă suma primelor n cifre este de forma $3k + 1$, mai putem completa doar cu 8, iar dacă suma primelor n cifre este de forma $3k + 2$, mai putem completa doar cu 1.

Cum există 4^n numere de n cifre formate cu cifrele 1, 9, 8, 6, vom avea $4^n - x_n$ numere A care nu au suma primelor n cifre divizibilă cu 3. Obținem relația de recurență $x_{n+1} = 2x_n + 4^n - x_n = x_n + 4^n$.

Dând valori lui n și sumând egalitățile găsite, deducem că $x_n = 4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4^1 + x_1$, de unde

$$x_n = \frac{4^n - 4}{3} + 2 = \frac{4^n + 2}{3}.$$

□

Problema 3. Fie $z, w \in \mathbb{C}$. Se numește **produsul real** al numerelor complexe z și w numărul complex notat $z \times w$, definit prin:

$$z \times w = \frac{\bar{z}w + \bar{w}z}{2}.$$

Demonstrați că:

a) $z \times (w - u) = z \times w - z \times u, \forall z, w, u \in \mathbb{C};$

b) Dacă Z și W sunt imaginile geometrice ale numerelor complexe z și w , atunci $OZ \perp OW$ dacă și numai dacă $z \times w = 0$;

c) Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), dreptunghic în A , iar M mijlocul laturii (AD). Perpendicularele din A pe MB , respectiv din D pe MC se intersectează în N . Demonstrați că $MN \perp BC$.

Soluție. a) Verificare prin calcul direct.

b) Avem echivalențele $OZ \perp OW \Leftrightarrow OZ^2 + OW^2 = ZW^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \bar{z}w + \bar{w}z = 0 \Leftrightarrow z \times w = 0$.

c) Alegem originea sistemului în M . Restul afixelor le notăm cu litere mici analoage literelor mari. Ipoteza devine $d + a = 0$, $b \times (n - a) = 0$ și $c \times (n - d) = 0$. De aici $b \times a = b \times n$ și $c \times n = c \times d$. Atunci $n \times (b - c) = n \times b - n \times c = b \times a - c \times d$. Dar $MA \perp AB \Rightarrow a \times (a - b) = 0 \Rightarrow a \times b = |a|^2$. Analog $c \times d = |d|^2$. Atunci $n \times (b - c) = |a|^2 - |d|^2 = 0$, ceea ce încheie problema. \square