Concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro, Ediția a XVI-a, Etapa 5

Barem - Clasa a X-a

1. Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $\sqrt[8x-1]{16x} = \sqrt[4-4x]{8x}$, stabiliți care dintre următoarele numere este pătratul unui număr natural:

- $2x^2$
- $8x^3$
- $4x^4$
- $6x^2$
- $12x^3$

2. Știind că $a = \log_3 120$ și $b = \log_3 2$, numărul $c = \log_3 90$ este egal cu:

- $1 + a - 2b$
- $a - 2b - 1$
- $2 + a - b$
- $1 - a - 2b$
- $1 + a - b$

3. Se consideră expresia $E(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ și numărul $w = 2 - \sqrt[3]{2}$. Numărul $E(w)$ este egal cu:

- 6
- -4
- $8\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[3]{16}$
- 7

4. Se consideră numerele $x_k = (\sqrt[5]{4})^{80-k} \cdot (\sqrt[3]{2})^k, k = \overline{0, 80}$. Numărul numerelor raționale din mulțimea $M = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{80}\}$ este egal cu:

- 6
- 38
- 39
- 7
- 12

5. Partea întreagă a numărului $a = \log_2 5 + \log_{25} 256$ este egală cu:

- 2
- 3
- 4
- 5
- 6

6. Se consideră o funcție injectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există un număr real a astfel încât: $f(x) \cdot f(1-x) = f(a \cdot x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Numărul a este egal cu:

- -2
- -1
- 0
- 1
- $\frac{1}{2}$

7. Cel mai mic număr întreg m pentru care inegalitatea $4^x + (m-1) \cdot 2^{x+1} + m - 1 \geq 0$ este adevărată pentru orice număr real x, este egal cu:

- 0
- 1
- 2
- -2
- -1

8. Ordinea crescătoare a numerelor $m = \sqrt[6]{6400}$, $n = 5 \cdot \sqrt[3]{3}$, $p = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$ este:

- p, m, n
- m, n, p
- m, p, n
- p, n, m
- n, p, m

9. Dacă $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, și funcția $f : \mathbb{R} \to [a, b], f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$, este surjectivă, atunci numărul $c = 3a + 2b$ este egal cu:

- 2
- 3
- 0
- 4
- 1

10. Dacă $a, b \in (0, +\infty), a \neq b$, iar $2 + \log_2 a + \log_2 b = \log_2(2a^2 + ab + b^2)$, atunci numărul $c = \frac{a}{b}$ este egal cu:

- $\frac{1}{3}$
- $\frac{3}{2}$
- 3
- 2
- $\frac{1}{2}$

11. Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{5 + x} - \sqrt[3]{x + 1} = 2$ este egală cu:

- -6
- $-1 - 2\sqrt{17}$
- $1 + 2\sqrt{17}$
- 6
- 10

12. Dacă $a > 1$ este număr real astfel încât $a^4 + \frac{1}{a^4} = \frac{6817}{1296}$, atunci numărul $b = a - \frac{1}{a}$ este egal cu:

- $\frac{1}{6}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{7}{6}$
- $\frac{5}{6}$
- $\frac{7}{12}$

13. Dacă (x_1, x_2, x_3) este o soluție a sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \log_3(1+x_1) = \log_7(3+x_2+x_3) \\ \log_3(1+x_2) = \log_7(3+x_3+x_1) \\ \log_3(1+x_3) = \log_7(3+x_2+x_1) \end{cases}$$

pentru care $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, atunci numărul $T = x_1 + 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3$ aparține intervalului:

- $\left(-\frac{8}{3}, \frac{1}{7}\right)$
- $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{7}\right)$
- $\left(\frac{1}{7}, \frac{7}{3}\right)$
- $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{7}\right)$
- $\left(-\frac{11}{7}, -\frac{1}{3}\right)$

14. Dacă $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \leq b$, este soluție a sistemului de ecuații
$\begin{cases} 9^x + 7x = 5y + 4 \\ 9^y + 7y = 5x + 4 \end{cases}$,
atunci numărul $M = \frac{a+b}{a \cdot b}$ este egal cu:

- $\frac{1}{2}$
- 2
- $\frac{1}{4}$
- 4
- 1

15. Produsul soluțiilor reale ale ecuației $4 + 4^x \cdot \log_2 x = 2^{2x+1} + \log_2(x^2)$ este egal cu:

- $\frac{1}{2}$
- 2
- $\frac{9}{2}$
- 8
- 4

16. Cel mai mare număr întreg k, pentru care inegalitatea $\log_{\frac{k-1}{k+1}}(x^2+3) \geq 1$ este adevărată pentru orice număr real x, este egal cu:

- -4
- -3
- -2
- 0
- 3

17. Dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$ și $a+b+c=4$, atunci valoarea minimă a expresiei $E = \frac{\log_a b}{a+b} + \frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a}$ este egală cu:

- $\frac{3}{2}$
- $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{3}$
- $\frac{9}{8}$
- $\frac{9}{16}$

18. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare cu proprietatea că $f(f(x)) + f(x) = 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci numărul $P = f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot f\left(\frac{4}{3}\right) \cdot f\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{2022}{2021}\right)$ este egal cu:

- $1011 \cdot 2023$
- 1011
- $\frac{1}{2021!}$
- $\frac{1}{2022!}$
- $2022!$

19. Funcția bijectivă $f : \mathbb{R} \to (7, +\infty)$, $f(x) = 81^x + 9^x + 7$, are inversa g. Numărul $s = g(19) + g(97)$ este egal cu:

- -1
- $\frac{1}{2}$
- $-\frac{1}{4}$
- $\frac{3}{2}$
- $\frac{3}{4}$

20. Se consideră mulțimea $\mathcal{S}(a) = \left\{ x \in \mathbb{Z} \middle| \log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4} \right\}$. Numărul elementelor mulțimii $\mathcal{D} = \mathcal{S}(2022) \setminus \mathcal{S}(2048)$ este egal cu:

- 27
- 26
- 0
- 1026
- 13

21. Numărul elementelor mulțimii $\mathcal{A} = \left\{ n \in \mathbb{Z} \middle| 1 + \log_2 (n+1) = n + \cos \frac{n\pi}{6} \right\}$ este egal cu:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 6

22. Se consideră funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:
$f_1(x) = 2^x - 1,\ f_2(x) = 2022 + x^{2021},\ f_3(x) = \log_2\left(1 + x^4\right),\ f_4(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 1 \\ 4^x, & x > 1 \end{cases}$.
Dintre cele considerate, funcțiile surjective sunt:

- f_1, f_3
- f_2, f_4
- f_1, f_4
- f_2, f_3
- f_1, f_2

23. Se consideră funcțiile $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:
$f_1(x) = 2^x - 1,\ f_2(x) = 2022 + x^{2021},\ f_3(x) = \log_2\left(1 + x^4\right),\ f_4(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 1 \\ 4^x, & x > 1 \end{cases}$.
Dintre cele considerate, funcțiile injective sunt:

- f_1, f_2, f_4
- f_1, f_3, f_4
- f_1, f_2, f_3
- f_2, f_3
- f_1, f_3

24. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 2}$ și mulțimea $T = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| f(x) = 4\right\}$. Numărul $w = \sum\limits_{x \in T} \frac{1}{x^2}$ este egal cu:

- $\frac{5}{2}$
- 2
- $\frac{5}{4}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{3}{4}$