## Etapa 7, Problema 3

Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea funcţiilor $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ având proprietăţile:
(i) $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in[0,1]$;
(ii) $f(1)=1$;
(iii) $f(x)+f(y)\leq f(x+y)$, oricare ar fi numerele $x,y$ şi $x+y$ din intervalul $[0,1]$.
Determinaţi cea mai mică valoare a numărului real $C$ pentru care

$$f(x)\leq Cx,\ \forall f\in M,\ \forall x\in[0,1].$$

*USA Mathematical Olympiad, 1993*

**Soluţie.**
Vom arăta că valoarea minimă dorită este $C=2$.
Funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 1, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$ aparţine lui $\mathcal{M}$ şi cu ajutorul ei se arată că numărul $C$ nu poate fi făcut mai mic decât 2.

Demonstrăm în continuare că $f(x)\leq 2x,\ \forall f\in M,\ \forall x\in[0,1]$. Luăm $y=1-x$ în (iii) şi deducem, ţinând cont de (i) şi (ii), că $f(x)\leq 1,\ \forall x\in[0,1]$. Deoarece $f(0)\geq 0$ şi $f(0)+f(1)\leq f(1)$, rezultă că $f(0)=0$. Considerăm $y=x$ în (iii) şi obţinem că $2f(x)\leq f(2x)$ pentru $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$. Prin inducţie, $2^n f(x)\leq f(2^n x)$ pentru $n\geq 1$ şi $x\in\left[0,\frac{1}{2^n}\right)$.

Dacă $x>\frac{1}{2}$, atunci $f(x)\leq 1<2x$. Fie $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ dat şi alegem $n\geq 1$ pentru care $\frac{1}{2^{n-1}}<x\leq\frac{1}{2^n}$; conform celor de mai înainte, $2^n f(x)\leq f(2^n x)\leq 1<2\cdot 2^n x$, de unde $f(x)<2x,\ \forall x\in(0,1]$. Cu aceasta, soluţia este completă.