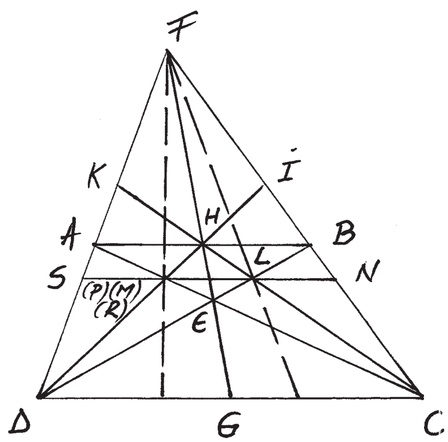
Problema 3. **Fiind dat un trapez $ABCD$, cu bazele AB şi CD, numai cu rigla negradată, să se construiască punctele care împart bazele acestuia în trei părţi egale.**

Demonstraţie



Trasăm diagonalele AC şi BD, notând cu E punctul lor de intersecţie.

Construim punctul de intersecţie al laturilor neparalele ale trapezului, $\{F\} = AD \cap BC$.

În ΔFDC trasăm prin E a treia ceviană, FG, $\{G\} \in [DC]$. Fie $\{H\} = FE \cap AB$.

Aplicând teorema lui Ceva în ΔFDC pentru cevienele AC, BD, FG obţinem $\dfrac{AD}{AF} \cdot \dfrac{BF}{BC} \cdot \dfrac{GC}{GD} = 1 \quad (*)$.

Dar $AB \| CD \overset{\text{Thales}}{\Longrightarrow} \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{FB}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{BF}{BC} \cdot \dfrac{AD}{AF} = 1$ şi înlocuind în $(*)$ obţinem $\dfrac{GD}{GC} = 1$, de unde FG mediană în ΔFDC.

Construim $\{I\} = DH \cap BC$, $\{K\} = CH \cap AD$.

Aplicând din nou teorema lui Ceva în ΔFDC pentru cevienele FG, CK, DI obţinem $\dfrac{KD}{KF} \cdot \dfrac{IF}{IC} \cdot \dfrac{GC}{GD} = 1$ şi cum $\dfrac{GC}{GD} = 1$ rezultă $\dfrac{KD}{KF} \cdot \dfrac{IF}{IC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KF}{KD} = \dfrac{IF}{IC} \Rightarrow KI \| CD$.

Fie $\{L\} = DB \cap CH$, $\{M\} = AC \cap DH$.

În ΔIDC, pe lângă cevienele BD şi CH, luăm în considerare a treia ceviană IL. Fie $\{L'\} = IL \cap DC$.

Aplicând teorema lui Ceva în ΔIDC avem $\frac{HD}{HI} \cdot \frac{BI}{BC} \cdot \frac{L'C}{L'D} = 1$ şi cum $\frac{HI}{HD} = \frac{BI}{BC}$ (deoarece $BH \| CD$) rezultă $\frac{L'C}{L'D} = 1$, de unde obţinem că $\{L'\} = \{G\}$.

Trasăm prin L o paralelă la DC, care taie IC şi ID în N, respectiv P. Cum IL este mediană în $\Delta IDC \Rightarrow IL$ este mediană şi în $\Delta IPN \Rightarrow [LP] \equiv [LN]$.

În ΔCBA, CH este mediană $\Rightarrow CL$ este mediană $\Rightarrow [LN] \equiv [LR]$ (unde $\{R\} = LN \cap AC$!).

Am obţinut astfel că $[LN] \equiv [LR] \equiv [LP]$, de unde rezultă că punctele R şi P se vor afla la intersecţia dintre AC şi ID, adică $\{R\} = \{P\} = \{M\}$.

Analog, considerând că paralela dusă prin M la CD va tăia AD în S, urmând demonstraţia anterioară, de data aceasta pentru triunghiurile ΔKDC şi ΔADB, vom obţine că această paralelă va tăia pe CK şi BD în punctul lor de intersecţie, L.

Am obţinut astfel coliniaritatea punctelor S, M, L, N şi cum

$$[SM] \equiv [ML],\ [ML] \equiv [LN]$$

rezultă $[SM] \equiv [ML] \equiv [LN]$, adică punctele M şi L împart SN în trei părţi egale.

Cum $SN \| AB \| CD$, trasând dreptele FM şi FL, vom obţine atât pe baza AB cât şi pe baza CD perechile de puncte care le împart pe acestea în trei părţi egale.

$\square$