

Etapa 5, Problema 2

Fie $m, n, p, q, r \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$ și $p + q + r = n$. Demonstrați relația

$$C_n^m = \sum_{x+y+z=m} C_p^x \cdot C_q^y \cdot C_r^z.$$

Soluție.

Folosim metoda numărării în două moduri. De exemplu, putem considera următoarea situație:

Într-un oraș există un grup de n suporterți, dintre care p țin cu echipa P , q țin cu echipa Q și r țin cu echipa R . Se alege un număr de m suporterți care să reprezinte acest oraș la o adunare generală a suporterților din țară. Care este numărul posibilităților de alegere a acestor reprezentanți?

Cel mai simplu mod de a gândi este următorul: de fapt, alegem m suporterți din totalul de n , deci există C_n^m moduri de alegere.

A doua modalitate de numărare este cea prin care alegem suporterții în funcție de echipa pe care o susțin. Din cei m aleși, avem x susținători ai echipei P , y susținători ai echipei Q și z susținători ai echipei R , astfel încât $x + y + z = m$. Însușind, obținem $C_n^m = \sum_{x+y+z=m} C_p^x \cdot C_q^y \cdot C_r^z$ moduri de alegere și, de aici, concluzia problemei.