Clasa a XII-a, Gazeta Matematica nr. 3

27822. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$. Arătaţi că există $c\in(0,1)$ astfel încât $f(c)=c(c-1)$.

Florin Rotaru, Focşani

27824. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel neunitar cu proprietatea că dacă $x\in A$ şi $x^2=0$, atunci $x=0$. Dacă $a,b,c\in A$ astfel încât $a^2=ab$, $b^2=bc$ şi $c^2=ca$, arătaţi că $a=b=c$.

Mihai Opincariu, Brad, Hunedoara

S:L20.111. Calculaţi următoarele integrale:

$$\int xe^{x^2}\sin x^2\mathrm{d}x \qquad \text{şi} \qquad \int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x.$$

* * *

S:L20.112. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel care are proprietatea că $x^3-4x^2+x=0$, oricare ar fi $x\in A$.

a) Daţi exemplu de un astfel de inel.

b) Arătaţi că $x+x=0$, oricare $x\in A$.

c) Arătaţi că inelul $(A,+,\cdot)$ este comutativ.

Lucian Tuţescu şi *Mihaela Stăncele*, Craiova

S:L20.113. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admite o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(0)=0$ şi $F(x)+f(x)=\sin x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

* * *

S:L20.114. Să se arate că pe orice interval deschis de numere reale (a,b) putem defini o operaţie algebrică $*$, astfel încât (a,b) împreună cu legea $*$ formează un grup.

* * *

S:L20.115. Să se arate că

$$\int_1^e (x^2+1)\ln^n x\mathrm{d}x<\frac{2}{e^{n+1}}\int_1^e \mathrm{e}^x x^n\mathrm{d}x.$$

Felician Preda, Craiova

S:L20.116. Fie $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_{n-1}X+a_n$ şi $g=X^n+b_1X^{n-1}+\ldots+b_{n-1}X+b_n$.

Ştiind că $\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{f(2)}{g(2)}=\ldots=\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{n}{n+1}$ şi există $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $g(k)=k$, determinaţi $f(k)$.

Lucian Tuţescu şi *Camelia Dană*, Craiova