Problema 2. Un număr se numeşte *bun* dacă are forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, unde a, b, c sunt numere naturale. Arătaţi că alegând 9 numere bune, la întâmplare, există cel puţin două al căror produs este pătrat perfect.

* * *

Un nr. natural. poate fi par sau impar. => În funcție de paritatea exponenților avem posibilitățile:

a	par	par	par	par	impar	impar	impar	impar
b	par	par	impar	impar	par	par	impar	impar
c	par	impar	par	impar	par	impar	par	impar

=> Avem în total 8 cazuri distincte de scriere a nr. din ipoteză în funcție de paritatea exponenților și 9 nr. „bune". Deci, conform Principiului Cutiei, avem 8 „cutii" și 9 „obiecte" de așezat în ele. => Vor (∃) cel puțin 2 „obiecte" în aceeași „cutie". => (∃) cel puțin 2 nr. „bune" care au aceeași paritate a exponenților.

Fie acestea: $2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \cdot 5^{c_1}$ și $2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{c_2}$ astfel încât:

$$\begin{cases} a_1 = 2p_1 + r_1 \\ a_2 = 2p_2 + r_1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 2q_1 + r_2 \\ b_2 = 2q_2 + r_2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 2s_1 + r_3 \\ c_2 = 2s_2 + r_3 \end{cases}$$

astfel încât $r_i \in \{0, 1\}$ (T.Î.R) și $i = \overline{1,3}$

=> Produsul lor va fi:

$$\left(2^{2p_1+r_1}\cdot 2^{2p_2+r_1}\right)\cdot\left(3^{2q_1+r_2}\cdot 3^{2q_2+r_2}\right)\cdot\left(5^{2s_1+r_3}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, 5^{2s_2+r_3}\right) =$$

$$2^{2(p_1+p_2+r_1)}\cdot 3^{2(q_1+q_2+r_2)}\cdot 5^{2(s_1+s_2+r_3)} =$$

$$\left(2^{p_1+p_2+r_1}\cdot 3^{q_1+q_2+r_2}\cdot 5^{s_1+s_2+r_3}\right)^2 = \text{pătrat perfect}$$

=> $(\forall)$ am alege 9 nr. „bune", $(\exists)$ printre ele cel puțin 2 nr. cu produsul = pătrat perfect.