P1. a) Fie p un număr prim, iar $a \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ un întreg nemultiplu de p. Arătaţi că funcţia

$$\mu_a : \{1, 2, \ldots, p-1\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, p-1\}\,, \quad \mu_a(k) = \text{restul împărţirii lui } ak \text{ prin } p$$

este o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.
b) Pentru $p = 7$ determinaţi toate permutările $\sigma \in S_6$ cu proprietatea că $\sigma\mu_2 = \mu_4\sigma$.

S. a) Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, deoarece $p \not| a$ şi $p \not| k$, rezultă că $p \not| ak$. Funcţia μ_a este deci corect definită. Pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ cu $i < j$, deoarece $p \not| (j-i)$, rezultă că $p \not| a(j-i)$, de unde $p \not| (\mu_a(j) - \mu_a(i))$, astfel că $\mu_a(i) \neq \mu_a(j)$. Rezultă că funcţia μ_a este injectivă, şi cum $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ este finită, μ_a este bijectivă, deci o permutare a mulţimii $\{1, 2 \ldots, p-1\}$.
b) În notaţie ciclică avem că $\mu_2 = (1, 2, 4)(3, 6, 5)$, iar $\mu_4 (= \mu_2^{-1}) = (1, 4, 2)(3, 5, 6)$. Ţinând cont de identitatea $\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_l)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_l))$, condiţia din enunţ se transcrie echivalent:

$$\sigma\mu_2 = \mu_4\sigma \iff \sigma\mu_2\sigma^{-1} = \mu_4 \iff (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4))(\sigma(3), \sigma(6), \sigma(5)) = (1, 4, 2)(3, 5, 6) \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4)) & = & (1, 4, 2) \\ (\sigma(3), \sigma(6), \sigma(5)) & = & (3, 5, 6) \end{array} \right. \quad (1), \qquad \text{sau} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4)) & = & (3, 5, 6) \\ (\sigma(3), \sigma(6), \sigma(5)) & = & (1, 4, 2) \end{array} \right. \quad (2).$$

Mulţimea permutărilor care verifică condiţia (1) de mai sus este

$$\begin{array}{rl} A = & \{(2,4)(5,6), (2,4)(3,5), (2,4)(3,6), (1,4)(5,6), (1,4)(3,5), (1,4)(3,6), (1,2)(5,6), \\ & (1,2)(3,5), (1,2)(3,6)\}. \end{array}$$

Mulţimea permutărilor care verifică condiţia (2) este

$$\begin{array}{rl} B = & \{(1,3)(2,5)(4,6), (1,3,4,6,2,5), (1,3,2,5,4,6), (1,5,2,6,4,3), (1,5)(2,6)(3,4), (1,5,4,3,2,6), \\ & (1,6,4,5,2,3), (1,6,2,3,4,5), (1,6)(2,3)(4,5)\}. \end{array}$$

Avem astfel că $\{\sigma \in S_6 |\, \sigma\mu_2 = \mu_4\sigma\} = A \cup B$.