Problemă. Fie $f, g\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ funcţii continue, astfel încât $\sup\limits_{0\le x\le 1} f(x) = \sup\limits_{0\le x\le 1} g(x)$. Arătaţi că există un punct $t \in [0,1]$ astfel încât

$$f(t)^2 + 3f(t) = g(t)^2 + 3g(t).$$

Examen Univ. Berkeley, 1995

Soluţie. Funcţiile fiind continue, îşi ating extremele pe intervalul $[0,1]$, conform cu teorema lui Weierstrass. Fie deci $a \in [0,1]$ astfel încât $f(a) = \sup\limits_{0\le x\le 1} f(x)$ şi $b \in [0,1]$ astfel încât $g(b) = \sup\limits_{0\le x\le 1} g(x)$. Dacă $a = b$, putem lua $t = a = b$. Dacă nu, atunci $g(b) = f(a) \ge f(b)$, $g(a) \le g(b) = f(a)$; fie funcţia $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $h(t) = (f(t)^2 + 3f(t)) - (g(t)^2 + 3g(t)) = (f(t) - g(t))(f(t) + g(t) + 3)$. Ea este continuă, şi avem $h(a)h(b) = (f(a) - g(a))(f(b) - g(b))(f(a) + g(a) + 3)(f(b) + g(b) + 3) \le 0$, prin urmare funcţia h se anulează într-un punct t în intervalul $[\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$.