P2. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale n pentru care $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ este pătrat perfect.

S. Fie $A=\{a-b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-2b^2=-1\}$. Observăm că $1-\sqrt{2}\in A$.

Se arată prin inducție că $(1-\sqrt{2})^{2n+1}\in A$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Cum $(1-\sqrt{2})^{2n+1}\neq(1-\sqrt{2})^{2m+1}$, pentru orice $m,n\geq 1,\ m\neq n$, rezultă că mulțimea A este infinită.

Conform celor de mai sus , există o infinitate de perechi $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ astfel încât $a^2-2b^2=-1$.

Pentru numărul natural $n=a^2$, rezultă $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{a^2(a^2+1)}{2}=a^2b^2=(ab)^2$, de unde se obține concluzia.