Clasa a IX-a - Etapa 4 - Problema 1

Enunţ:

a) Demonstraţi că oricare ar fi $a,b\in(0,\infty)$ *are loc inegalitatea*

$$-\frac{1}{2}\left(a^2-ab\right)\le\frac{ab(b-a)}{b+a}\le\frac{1}{2}\left(b^2-ab\right);$$

b) Demonstraţi că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$ *şi numerele reale* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,\infty)$ *are loc inegalitatea*

$$4\left|\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1+x_2}+\frac{x_2^3-x_3^3}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n^3-x_1^3}{x_n+x_1}\right|\le\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\ldots+\left(x_n-x_1\right)^2.$$

Soluţie:

a) Presupunând că $a\le b$, inegalitatea este echivalentă cu $a\le\frac{2ab}{a+b}\le b$ care este evidentă.

b) Avem $\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1+x_2}=\frac{(x_1-x_2)\left((x_1+x_2)^2-x_1x_2\right)}{x_1+x_2}=(x_1+x_2)(x_1-x_2)+\frac{x_1x_2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}=x_1^2-x_2^2+\frac{x_1x_2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$.

Atunci $\frac{x_1^3-x_2^3}{x_1+x_2}+\frac{x_2^3-x_3^3}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n^3-x_1^3}{x_n+x_1}=\frac{x_1x_2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}+\frac{x_2x_3(x_3-x_2)}{x_2+x_3}+..+\frac{x_nx_1(x_1-x_n)}{x_n+x_1}$. Se aplică acum puntul a) şi se obţine concluzia.