Etapa 3, Problema 4

Se consideră numerele reale pozitive a, b, c și funcția

$$f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}{3a^xb^xc^x}.$$

a) Demonstrați că funcția f este crescătoare.

b) Arătați că $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq 2$.

***

Soluție.

a) Presupunem $a\leq b\leq c$. Pentru $t\geq 0$, avem:

$$\frac{f(x+t)}{f(x)}=\frac{a^{3x+3t}+b^{3x+3t}+c^{3x+3t}}{a^tb^tc^t\left(a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{a^tb^tc^t}\left(\frac{a^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}\cdot a^{3t}+\frac{b^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}\cdot b^{3t}+\frac{c^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}\cdot c^{3t}\right).$$

Folosind inegalitatea lui Cebîșev, obținem că

$$\frac{f(x+t)}{f(x)}\geq\frac{1}{3a^tb^tc^t}\left(\frac{a^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}+\frac{b^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}+\frac{c^{3x}}{a^{3x}+b^{3x}+c^{3x}}\right)\times$$

$$\times\left(a^{3t}+b^{3t}+c^{3t}\right)=\frac{a^{3t}+b^{3t}+c^{3t}}{3a^tb^tc^t}.$$

Dar, din inegalitații mediilor, $\dfrac{a^{3t}+b^{3t}+c^{3t}}{3a^tb^tc^t}\geq 1$ și de aici rezultă monotonia lui f.

b) Întrucât f este funcție crescătoare, deducem că $f(1)\geq f\left(\frac{1}{3}\right)$, adică $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}\geq\dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}$. Rezultă astfel că

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\geq 2.$$