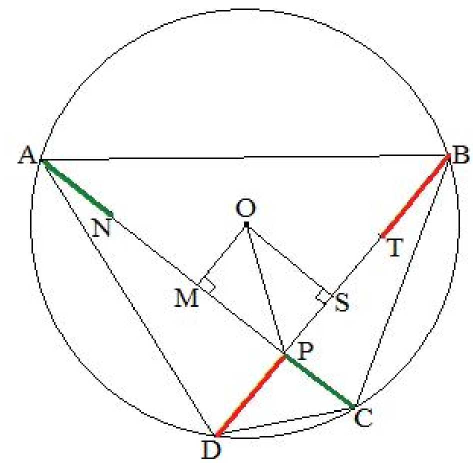
Etapa 3, problema 4

Camelia Oprea, clasa a 9-a

Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O. Ştiind că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$, unde P este punctul de intersecţie al diagonalelor, să se arate că patrulaterul este ortodiagonal.



Soluţie:

$ABCD$ patrulater inscris în cercul $\mathcal{C}(O,r)$

$\{P\}=AC\cap BD$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$

-----------------------------------/--

$AC\perp BD$

----------------------------------//--

Duc $OM\perp AC$, $M\in(AC)\Rightarrow \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$ (1)

(deoarece O este centrul cercului $\Rightarrow$ M e mijlocul $[AC]$)

şi $m(\angle PMO)=90^0$

Duc $OS\perp BD$, $S\in(BD)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{BS}$ (2)

(deoarece O este centrul cercului $\Rightarrow$ S e mijlocul $[BD]$)

Fie N simetricul lui P faţă de M, $N\in(AC)$ $\Rightarrow \overline{PM}=\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{PN}$ şi adunând cu (1)

$\Rightarrow \overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AN}$

Fie T simetricul lui P faţă de S, $T\in(BD)$ $\Rightarrow \overline{PS}=\overline{ST}=\frac{1}{2}\overline{PT}$ şi adunând cu (2)

$\Rightarrow \overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{BS} \Rightarrow \overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BT}$

$$2\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BT}=\underbrace{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AN}}+\underbrace{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BT}}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PT}=2\overrightarrow{PM}+2\overrightarrow{PS}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PS}$

$\Rightarrow PMOS$ paralelogram, dar $m(\angle PMO)=90^0 \Rightarrow PMOS$ dreptunghi

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow PM\perp PS\\ P,M\in AC,\ P,S\in BD\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp BD \Rightarrow ABCD \text{ patrulater ortodiagonal.}_{\text{q.e.d.}}$$

Observaţie:

Dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci punctele P şi O coincid $\Rightarrow \overrightarrow{PO}=\vec{0}$, iar $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PD}$ şi ca urmare relaţia $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}=2\overrightarrow{PO}$ este verificată, dar dreptunghiul nu este neapărat un patrulater ortodiagonal (doar dacă este pătrat).

Deci ar fi trebuit precizat în textul problemei că $ABCD$ nu este dreptunghi, sau că $\overrightarrow{PO}\neq\vec{0}$ sau că diagonalele nu se înjumătăţesc sau o altă formulare echivalentă.