Valori proprii și vectori proprii pentru matrici pătratice

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică.

Def: Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ s.n valoare proprie pentru matricea A dacă există un vector nenul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (matricea coloană) a.î $AX = \lambda X$.

Un astfel de vector se numește vector propriu pentru matricea A corespunzător valorii proprii λ.

OBS: 1. O relație de forma $AX = \lambda X$, $X \neq O_{n,1}$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ o numim relație de tip valoare proprie - vector propriu.

2. Mulțimea tuturor valorilor proprii pentru o matrice A, se numește spectrul matricii A și se notează cu Spec(A).

OBS: 1) Parțial, afirmațiile din propoziția de mai sus, admit și reciproca. Astfel:

a) Singurele valori proprii ale matricii A^k sunt de forma λ^k, unde λ este valoare proprie pentru A.

b) Singurele valori proprii ale matricii $p(A)$ sunt de forma $P(\lambda)$, unde λ este valoare proprie pentru A.

c) Singurele valori proprii ale matricii inverse A^{-1} sunt de forma $\frac{1}{\lambda}$, unde λ este valoare proprie pentru A.

Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dacă și numai dacă $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Demonstrație:

Relația $AX = \lambda X$; $X \neq O_{n,1}$ se poate scrie $\det(A - \lambda I_n)X = O_{n,1}$, $X \neq O_{n,1}$, care poate fi privită ca un sistem de n ecuații cu n necunoscute $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ și condiția $X \neq O_{n,1}$, cere ca el să admită soluția nebanală.

Aceasta este echivalentă cu condiția ca determinantul matricii coeficienților sistemului să fie egal cu zero, adică $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Polinom caracteristic al unei matrice pătratice

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică de ordin $n \in \mathbb{N}^*$.

Def: a) Matricea $(A - \lambda I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; $\lambda \in \mathbb{C}$ se numește matricea caracteristică a matricii A (λ - matrice)

b) Polinomul $f_A \in \mathbb{C}[X]$, $f_A(X) = \det(A - XI_n)$ s.n polinom caracteristic al matricii A.

c) Ecuația polinomială $f_A(x) = 0$ s.n ecuația caracteristică a matricii A.

OBS: Valorile proprii ale matricii A sunt rădăcinile polinomului caracteristic sau ale ecuației caracteristice

Expresia canonică a polinomului caracteristic

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ atunci $f_A(X) = (-1)^n [X^n - \sigma_1 \cdot X^{n-1} + \sigma_2 \cdot X^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \sigma_{n-1} X + (-1)^n \cdot \sigma_n]$, unde σ_k este suma tuturor minorilor diagonali de ordin K din matricia A (un minor diagonal este format cu linii și coloane de aceeași indici).

OBS: Dintre coeficienții polinomul caracteristic remarcăm:

$\sigma_1 = \sum a_{ii} = Tr(A)$ numit urma matricei A (suma elementelor de pe diagonală - minorii diagonali de ordin unu);

$\sigma_2 = \sum \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} = \sum (a_{ii} a_{jj} - a_{ij} \cdot a_{ji})$ (suma minorilor diagonali de ordin doi)

$\sigma_n = \det A$, singurul minor (și diagonal) de ordin n.

APLICAȚII

• Inversa unei matrice

Fie A - o matrice de ordinul n, inversabilă, atunci conform teoremei lui Cayley - Hamilton se verifică ecuația sa caracteristică, deci: (1)

$A^n - \sigma_1 \cdot A^{n-1} + \sigma_2 \cdot A^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \cdot A + (-1)^n \cdot \sigma_n \cdot I_n = O_n$.

Înmulțind ambii membri ai relației (1) la dreapta cu A^{-1}, rezultă

$A^n - \sigma_1 \cdot A^{n-1} + \sigma_2 \cdot A^{n-2} - \dots + A \cdot \sigma_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^n \cdot \sigma_n \cdot I_n \cdot A^{-1} = O_n$ sau

$A^{n-1} - \sigma_1 \cdot A^{n-2} + \sigma_2 \cdot A^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \cdot I_n + (-1)^n \cdot \sigma_n \cdot A^{-1} = O_n$, de unde

($\sigma_n = \det A \neq 0$, căci A este inversabilă) rezultă

$$A^{-1} = -\frac{(-1)^n}{\det A} \cdot [A^{n-1} - \sigma_1 A^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \cdot I_n]$$

Ex: 1. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A este inversabilă deoarece $\det A = -2 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [A^2 - \sigma_1 \cdot A + \sigma_2 \cdot I_3]; \quad \det A = -2;$$

$\sigma = Tr(A) = 3+0+0 = 3$; $\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 2 = -5$

și $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ iar $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Avem: $A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

• Calculul puterilor unei matrice prin recurență

Folosind teorema lui Cayley - Hamilton, putem calcula A^p, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$, prin recurență.

Într-adevăr, cum $A^n + \alpha_1 \cdot A^{n-1} + \dots \alpha_n \cdot I_n = 0$, înmulțind cu A^k, obținem $A^{n+k} + \alpha_1 \cdot A^{n+k-1} + \dots + \alpha_n \cdot A^k = 0$; $k \in \mathbb{N}$.

• Proprietate: Dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ atunci $A^n = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A + z_n \cdot I_3$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}$

Aplicând proprietatea de mai sus rezultă $\sigma_1 = 3$; $\sigma_2 = 3$; $\sigma_3 = 1$ iar ecuația caracteristică a matricei A devine $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$; de unde $x_3 = 3$; $y_3 = -3$; $z_3 = 1$. Ecuația caracteristică (3) devine $r^3 = 3r^2 - 3r + 1$ de unde $r_1 = r_2 = r_3 = 1$.

Ținând cont că $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=3$ obținem $x_n=\frac{n^2-n}{2}$. Din $z_n=z_3\cdot x_{n-1}$; $y_n=y_3\cdot x_{n-1}+z_{n-1}$ se obține $z_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; $y_n=-n(n-2)$. Deci $A^n=x_n\cdot A^2+y_nA+z_nI_3$, adică $A^n=\frac{n^2-n}{2}\cdot A^2-n(n-2)A+\frac{(n-1)(n-2)}{2}I_3$, de unde se obține

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$n\in\mathbb{N}^*$, rezultat ce se putea obține ușor calculând A^2; A^3 până se observa regula de obținere a matricii A, rezultat ce se verifică prin inducție matematică sau aplicând binomul lui Newton, observând că $A=I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Probleme rezolvate + propuse

1. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai matricii A.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Rezolvare: Ecuația caracteristică atașată lui A este

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -2-\lambda & -1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6)=0$$ de unde $\Rightarrow \lambda_1=-2$; $\lambda_2=1$; $\lambda_3=3$ (valorile proprii)

Fie $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $x,y,z\in\mathbb{R}$. Pentru $\lambda_1=-2$ ecuația matriceală $AX=-2X$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases}4x+y+z=0\\ x-z=0\\ x+y+4=0\end{cases}$, de unde obținem $X_1=(z,-5z,z)$; $z\in\mathbb{R}$.

Analog rezultă $X_2=(z,0,z)$, $X_3=\left(-\frac{z}{2},-\frac{z}{2},z\right)$

2. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea $A^2=3A-2I_n$. Să se arate că $\exists\ p\in\{0;1;\dots n\}$ a.î. $\det A=2^p$

Rez: Dacă A verifică ecuația $\lambda^2-3\lambda+2=0$, pentru orice valoare proprie λ_k avem $\lambda_k^2-3\lambda_k+2=0$ deci $\lambda_k=2$ sau $\lambda_k=1$. Presupunem că p valori proprii sunt egale cu 2 ($p\in\{0;1;\dots;n\}$). Atunci, folosind ultima relație a lui Viete referitoare la polinomul caracteristic avem $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=(-1)^n\cdot\frac{\det A}{(-1)^n}=\det A$; $\det A=\underbrace{2\cdot2\cdot2\dots}_{p}\cdot\underbrace{1\cdot1\dots1}_{n-p}=2^p$

3. Fie $p\geq 2$ un număr prim. Să se arate că ecuația $X^2-X-I_p=O_p$ are soluții în $M_p(\mathbb{Z})$ dacă și numai dacă $p=2$.

Fie $\lambda_1;\lambda_2\dots\lambda_p$ – valorile proprii ale unei matrice soluție A. Avem $Tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_p$; $Tr(A^2)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_p^2$ și $Tr(I_p)=p$, de unde $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_p^2=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_p+p$. (1) Cum polinomul caracteristic $P_A=\det(A-\lambda I_p)$ are coeficienți întregi, iar $\lambda_1;\lambda_2;\dots\lambda_p$ sunt rădăcinile sale rezultă că $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_p$ și $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_p^2$ sunt nr. întregi. $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_p^2=(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_p)^2-2(\lambda_1\lambda_2+\dots+\lambda_{p-1}\lambda_p)$. Din relația (1) rezultă că $p=$ par sau $p=2$. Reciproc, dacă $p=2$ ecuația $X^2-X-I_2=O_2$ are soluții, de exemplu $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Probleme propuse:

4. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea $A^2 = I_n$, atunci $\det(A + I_n) \geq \det(A - I_n)$ în ipoteza $n \in \mathbb{N}$ este impar.

5. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice nilpotentă ($\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $A^p = O_n$).

Să se arate că:

a) $\det(\lambda A + I_n) = 1 \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$;

b) $\det(A + I_n) \geq \det(A - I_n)$.

6. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $\lambda \in \mathbb{C}$ avem:

a) $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$

b) $\det(\lambda I_n + AB) = \det(\lambda I_n + BA)$.

BIBLIOGRAFIE

1. MATEMATICĂ - manual pentru clasa a $\overline{XI}^{a}$" - editura CARMINIS
2. MATEMATICĂ - culegere de exerciții și probleme" - pt clasa a $\underline{XI}^{a}$ - editura ART
3. EXERCIȚII + PROBLEME DE ALGEBRĂ PENTRU OLIMPIADE + CONCURSURI" - editura ROVIMED PUBLISHERS - Loredana Jeliagă
4. MATEMATICĂ - clasa a XI-a - editura CARMINISM + MARIUS BURTEA + GEOGERTA BURTEA
5. MATEMATICĂ PENTRU GRUPELE DE PERFORMANȚĂ - clasa a $\underline{XI}^{a}$ - editura DACIA EDUCAȚIONAL
6. MATEMATICĂ PENTRU GRUPELE DE PERFORMANȚĂ" - clasa a $\underline{XI}^{a}$ - DACIA EDUCAȚIONAL
7. MATEMATICĂ - probleme + exerciții - clasa a $\overline{\underline{XI}}^{a}$ - editura CAMPION

MIRONESCU BIANCA MARIA