

Clasa a X-a - Etapa 3

Problema 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ cu $a^2 + b^2 = c^2$. Să se arate că

$$|c - a| + |c + a| = |c - b| + |c + b|.$$

Soluție. Folosim identitatea

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2,$$

valabilă pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$.

Atunci

$$\begin{aligned} (|c - a| + |c + a|)^2 &= |c - a|^2 + |c + a|^2 + 2|c - a||c + a| \\ &= 2|c|^2 + 2|a|^2 + 2|c^2 - a^2| \\ &= 2|c|^2 + 2|a|^2 + 2|b^2|. \end{aligned}$$

Analog $(|c - b| + |c + b|)^2 = 2|c|^2 + 2|a|^2 + 2|b^2|$, de unde obținem concluzia.