Problemă. Arătaţi că nu există o funcţie

$$f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$$

astfel încât

$$f(x)^2 \geq f(x+y)(f(x)+y), \forall x, y > 0.$$

* * *

Soluţie.

Se obţine imediat că f este strict descrescătoare, căci $f(x) \geq f(x+y)\left(1+\dfrac{y}{f(x)}\right) > f(x+y)$.

Pentru $y = f(x)$ avem $f(x+f(x)) \leq \dfrac{f(x)}{2}$. Pentru un număr real pozitiv arbitrar x_0, construim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$. Atunci $f(x_{n+1}) \leq \dfrac{f(x_n)}{2}$ implică prin iterare $f(x_n) \leq \dfrac{f(x_0)}{2^n}$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

Dar atunci $x_{n+1} = x_0 + f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_n) \leq x_0 + f(x_0)\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}\right) < x_0 + 2f(x_0)$.

Astfel, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior de constanta $m = x_0 + 2f(x_0)$. Prin urmare $0 < f(m) \leq f(x_n) \leq \dfrac{f(x_0)}{2^n}$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_0)}{2^n} = 0$, ceea ce conduce la $f(m) = 0$, contradicţie, deci nu există o astfel de funcţie f.