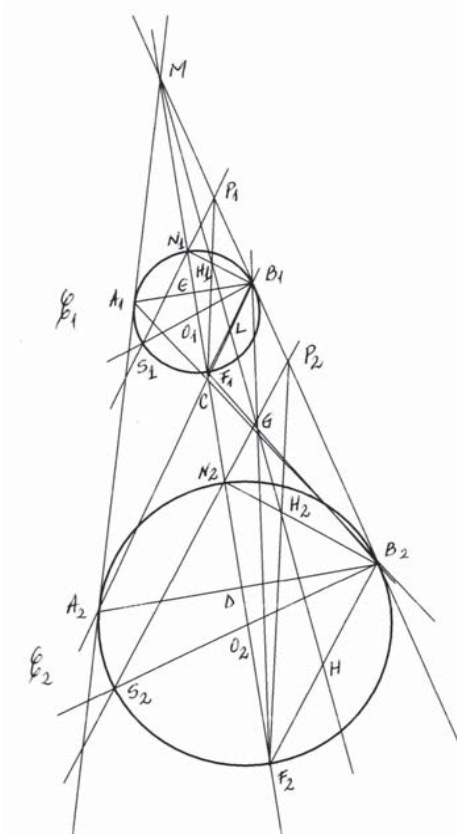
Problema 3. Fie cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, de raze diferite, ale căror centre nu se cunosc. Tangentele comune exterioare celor două cercuri se intersectează în punctul $\{M\}$, iar punctele de tangenţă sunt $\{A_1, B_1\} \in \mathcal{C}_1$ şi $\{A_2, B_2\} \in \mathcal{C}_2$, perechile (A_1, A_2), respectiv (B_1, B_2) aflându-se fiecare pe o aceeaşi tangentă.

Să se construiască, cu rigla negradată, centrele $\{O_1\}$ şi $\{O_2\}$ ale cercurilor $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$.

Niţă Cristi

Demonstraţie



Deoarece MA_1 şi MB_1 sunt tangente la $\mathcal{C}_1$ rezultă $[MA_1] \equiv [MB_1]$ (1).

Deoarece MA_2 şi MB_2 sunt tangente la $\mathcal{C}_2$ rezultă $[MA_2] \equiv [MB_2]$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $\dfrac{MA_1}{MA_2} = \dfrac{MB_1}{MB_2} \Rightarrow A_1B_1 || A_2B_2$ (3).

Fie $A_1B_2 \cap A_2B_1 = \{C\}$ şi $MC \cap A_2B_2 = \{D\}$. Aplicând teorema lui Ceva în ΔMA_2B_2 pentru cevienele MD, A_1B_2, A_2B_1 concurente în C, obţinem

$$\frac{MA_1}{A_2A_1} \cdot \frac{A_2D}{B_2D} \cdot \frac{B_2B_1}{MB_1} = 1. \tag{4}$$

Dar,

$$\frac{MA_1}{MA_2} = \frac{MB_1}{MB_2} \Leftrightarrow \frac{MA_1}{MA_2 - MA_1} = \frac{MB_2}{MB_2 - MB_1} \Leftrightarrow$$

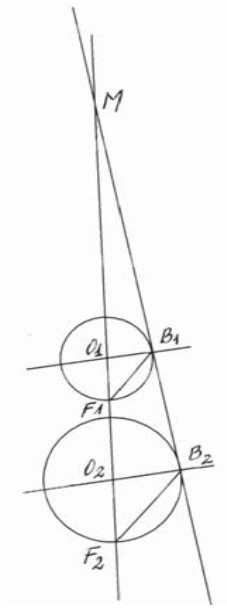
$$\Leftrightarrow \frac{MA_1}{A_2A_1} = \frac{MB_1}{B_2B_1} \Leftrightarrow \frac{MA_1}{A_2A_1} \cdot \frac{B_2B_1}{MB_1} = 1,$$

de unde rezultă că relaţia (4) devine $\dfrac{A_2D}{B_2D} = 1$ (5).

Rezultă din (5) că MD este mediană în ΔMA_2B_2 isoscel ($[MA_2] \equiv [MB_2]$), de unde obţinem (conform relaţiei (3)) că dacă $\{E\} = MD \cap A_1B_1$, atunci ME este mediană în ΔMA_1B_1 isoscel ($[MA_1] \equiv [MB_1]$). Cum cele două triunghiuri sunt isoscele, rezultă că MD şi ME sunt mediatoare ale segmentelor $[A_2B_2]$, respectiv $[A_1B_1]$. Deducem de aici că dreapta $MD = ME$ reprezintă dreapta ce trece prin centrele celor două cercuri $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.

Fie $MD \cap \mathcal{C}_1 = \{F_1\} (F_1 \in [ED])$ şi $MD \cap \mathcal{C}_2 = \{F_2\}$ (semidreapta $[DF_2)$ fiind opusă semidreptei $[DF_1)$). Vom obţine $F_1B_1 || F_2B_2$:

Demonstraţie (vom folosi figura de mai jos):



În figură observăm că $\Delta MO_1B_1 \sim \Delta MO_2B_2$ *(deoarece* $O_1 \perp MB_1$ *şi* $O_2B_2 \perp MB_2$*, rezultă* $O_1B_1||O_2B_2$*;* $\widehat{O_1MB_1} \equiv \widehat{O_2MB_2}$ *(unghi comun)).*

Obţinem astfel că $\widehat{MO_1B_1} \equiv \widehat{MO_2B_2} \Rightarrow 2 \cdot \widehat{O_1F_1B_1} = 2 \cdot \widehat{O_2F_2B_2} \Rightarrow \widehat{MF_1B_1} \equiv \widehat{MF_2B_2} \Rightarrow F_1B_1||F_2B_2$. $\square$

Fie acum $F_2B_1 \cap F_1B_2 = \{G\}$ şi $MG \cap B_1B_2 = \{H\}$. Aplicând teorema lui Ceva în ΔMF_2B_2 pentru cevienele MH, F_2B_1, F_1B_2 concurente în G, obţinem

$$\frac{MF_1}{F_2F_1} \cdot \frac{F_2H}{B_2H} \cdot \frac{B_2B_1}{MB_1} = 1. \tag{6}$$

Dar, $F_1B_1||F_2B_2$, de unde rezultă $\frac{MF_1}{F_2F_1} = \frac{MB_1}{B_2B_1} \Rightarrow \frac{MF_1}{F_2F_1} \cdot \frac{B_2B_1}{MB_1} = 1 \Rightarrow$ relaţia (6) devine $\frac{F_2H}{B_2H} = 1$, de unde deducem că H este mijlocul segmentului $[F_2B_2]$ (7).

Fie $\{L\} = MH \cap F_1B_1$. Deoarece $F_1B_1||F_2B_2$ şi MH este mediană în ΔMF_2B_2, rezultă ML este mediană în $\Delta MF_1B_1 \Rightarrow L$ este mijlocul segmentului $[F_1B_1]$ (8).

Fie $MD \cap \mathcal{C}_2 = \{N_2\}$ ($N_2 \in [ED]$) şi $MD \cap \mathcal{C}_1 = \{N_1\}$ (semidreapta $[EN_1)$ fiind opusă semidreptei $[EF_1)$).

Vom obţine $N_1B_1||N_2B_2$ (deoarece $\Delta N_1B_1F_1 \sim \Delta N_2B_2F_2$: $\widehat{F_1} \equiv \widehat{F_2}$ şi $\widehat{B_1} \equiv \widehat{B_2} = 90^\circ$ ($[N_1F_1]$ şi $[N_2F_2]$ sunt diametre), rezultă $\widehat{F_1N_1B_1} \equiv \widehat{F_2N_2B_2} \Rightarrow N_1B_1||N_2B_2$).

Fie $MH \cap N_2B_2 = \{H_2\}$ şi $F_2H_2 \cap MB_2 = \{P_2\}$. Aplicând teorema lui Ceva în ΔMF_2B_2 pntru cevienele MH, F_2P_2, B_2N_2 concurente în H_2, obţinem

$$\frac{MN_2}{F_2N_2} \cdot \frac{F_2H}{B_2H} \cdot \frac{B_2P_2}{MP_2} = 1 \overset{(7)}{\Rightarrow} \frac{MN_2}{F_2N_2} \cdot \frac{B_2P_2}{MP_2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{MN_2}{F_2N_2} = \frac{MP_2}{P_2B_2} \Rightarrow N_2P_2||F_2B_2.$$

De aici rezultă $\widehat{P_2N_2B_2} \equiv \widehat{N_2B_2F_2} = 90^\circ$ (ţinem cont de faptul că $[N_2F_2]$ este diametru! $\leftarrow (N_2, F_2) \in MD$), de unde, dacă $\{S_2\} = P_2N_2 \cap \mathcal{C}_2$, obţinem $\widehat{B_2N_2S_2} = 90^\circ$.

Din $\widehat{B_2N_2S_2} = 90^\circ$ şi $\widehat{N_2B_2F_2} = 90^\circ$ rezultă $[N_2F_2]$ şi $[B_2S_2]$ sunt diametre şi astfel deducem că $N_2F_2 \cap B_2S_2 = \{O_2\}$, centrul cercului $\mathcal{C}_2$.

Fie $ML \cap B_1N_1 = \{H_1\}$ şi $F_1H_1 \cap MB_1 = \{P_1\}$. Aplicând teorema lui Ceva în ΔMF_1B_1 pentru cevienele ML, F_1P_1, N_1B_1 concurente în H_1, obţinem

$$\frac{MN_1}{F_1N_1} \cdot \frac{F_1L}{B_1L} \cdot \frac{B_1P_1}{MP_1} = 1 \overset{(8)}{\Rightarrow} \frac{MN_1}{F_1N_1} \cdot \frac{B_1P_1}{MP_1} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{MN_1}{F_1N_1} = \frac{MP_1}{P_1B_1} \Rightarrow N_1P_1||F_1B_1.$$

De aici rezultă $\widehat{P_1N_1B_1} \equiv \widehat{N_1B_1F_1} = 90^\circ$ (ţinem cont de faptul că $[N_1F_1]$ este diametru! $\leftarrow (N_1, F_1) \in MD$), de unde, dacă $\{S_1\} = P_1N_1 \cap \mathcal{C}_1$, obţinem $\widehat{B_1N_1S_1} = 90^\circ$.

Din $\widehat{B_1N_1S_1} = 90^\circ$ şi $\widehat{N_1B_1F_1} = 90^\circ$ rezultă $[N_1F_1]$ şi $[B_1S_1]$ sunt diametre şi astfel deducem că $N_1F_1 \cap B_1S_1 = \{O_1\}$, centrul cercului $\mathcal{C}_1$.

■