Problemă. Fie un număr întreg $k > 1$. Demonstraţi că pentru o infinitate de numere întregi pozitive n avem

$$\text{cmmmc}[n, n+1, \ldots, n+k] > \text{cmmmc}[n+1, n+2, \ldots, n+k+1].$$

$* * *$

Soluţie. Când n este un număr prim mai mare decât k, avem

$$\text{cmmmc}[n, n+1, \ldots, n+k] = n \cdot \text{cmmmc}[n+1, n+2, \ldots, n+k].$$

Conform cu teorema lui Dirichlet, în progresia aritmetică $\{-1 + mk \; ; \; m = 3, 4, \ldots\}$ există o infinitate de numere prime; pentru un astfel de număr prim $n = -1 + mk > k + 1$ vom avea $n + k + 1 = (m + 1)k$ şi $n + 1 = mk$, deci $k \mid n + 1$ şi $k \mid n + k + 1$, şi atunci

$$\text{cmmmc}[n+1, \ldots, n+k+1] \leq \frac{n + k + 1}{k} \cdot \text{cmmmc}[n+1, \ldots, n+k].$$

Dar avem $n > k + 1$, deci $(k - 1)n \geq n > k + 1$, echivalent cu $n > \dfrac{n + k + 1}{k}$, ceea ce demonstrează cerinţa.

Este de remarcat că restricţia $k > 1$ este absolut necesară, căci

$$\text{cmmmc}[n, n+1] = n(n+1) < (n+1)(n+2) = \text{cmmmc}[n+1, n+2].$$