Problema 3. Se consideră punctele necoliniare A, B, C de afixe $a, b, c \in \mathbb{C}$. O dreaptă arbitrară d intersectează dreptele BC, CA, respectiv AB în punctele de afixe $a', b', c' \in \mathbb{C}$. Arătaţi că punctele de afixe aa', bb' şi cc' sunt coliniare.

***

Soluţie. Vom folosi în rezolvare următoarele două rezultate teoretice:

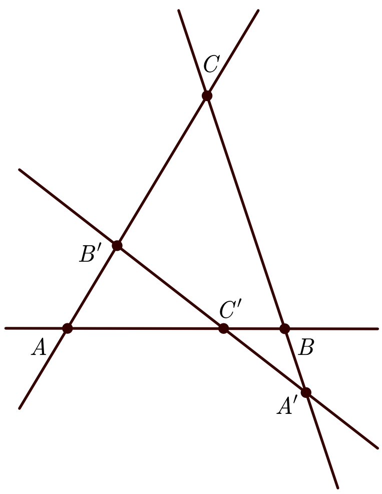
Lema 1. Punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă există $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $z_3 - z_1 = r(z_2 - z_1)$.

Lema 2. Fie A_1, A_2 puncte distincte în plan de afixe z_1, respectiv z_2 şi fie P un punct de pe dreapta A_1A_2 astfel încât $\overrightarrow{A_1P} = \lambda\overrightarrow{PA_2}$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\lambda \neq -1$. Dacă punctul P are afixul z_P, atunci $z_P = \dfrac{1}{\lambda+1}z_1 + \dfrac{\lambda}{\lambda+1}z_2$.

Fie A', B', C' punctele de afixe a', b', respectiv c'. Notăm $u = bb' - aa'$ şi $v = cc' - aa'$. Trebuie să arătăm că există $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $u = r \cdot v$.

Dacă dreapta d trece printrf-unul din punctele A, B sau C, concluzia este imediată. De exemplu, dacă d trece prin A, atunci $b' = c' = a$ deci $u = bb' - aa' = a(b - a')$ şi $v = cc' - aa' = a(c - a')$. Cum punctele C, B şi A' sunt coliniare, conform lemei 1 există $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $b - a' = r(c - a')$ şi atunci $u = r \cdot v$.

Dacă A, B, şi C nu se găsesc pe dreapta d, conform lemei 2 avem:



- $A' \in BC$ implică $\overrightarrow{CA'} = \alpha\overrightarrow{A'B}$, unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, deci
$$a' = \frac{1}{\alpha+1}c + \frac{\alpha}{\alpha+1}b \qquad (1)$$
- $B' \in CA$ implică $\overrightarrow{AB'} = \beta\overrightarrow{B'C}$, unde $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, deci
$$b' = \frac{1}{\beta+1}a + \frac{\beta}{\beta+1}c \qquad (2)$$
- $C' \in AB$ implică $\overrightarrow{BC'} = \gamma\overrightarrow{A'B}$, unde $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, deci
$$c' = \frac{1}{\gamma+1}b + \frac{\gamma}{\gamma+1}a \qquad (3)$$

Din teorema lui Menelaus avem $\alpha\beta\gamma = -1$, prin urmare $\gamma = \dfrac{-1}{\alpha\beta}$ şi atunci relaţia (3) devine $c' = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha\beta-1}b - \dfrac{1}{\alpha\beta-1}a$, (4).

Acum, folosind (1), (2) şi (4), calculăm $u = bb' - aa'$ şi $v = cc' - aa'$. Rezultă $u = \dfrac{\alpha\beta - 1}{\alpha(\beta+1)} \cdot v$, ceea ce încheie demonstraţia.