Problema 3. Fie numerele naturale nenule $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, unde $n \geq 2$ este număr natural. Ştiind că $a_k \leq n$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$ şi $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} = 1$, arătaţi că $(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdot ... \cdot (1 + a_n) = (1 + n)^n$.

Vasile Scurtu, Bistriţa

Rezolvare:

Vom demonstra că $a_1=a_2=a_3=....=a_n=n$.

P.p. prin absurd că unul dintre ele, să zicem $a_1<n$

$\Rightarrow \frac{1}{a_1} > \frac{1}{n}$

Deoarece $a_k \leq n$, $k \in \{2, 3, ..., n\}$

$\Rightarrow \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{n}$

$\frac{1}{a_3} \geq \frac{1}{n}$

$- - - -$

$\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} > \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{de\ n\ ori} = 1$ contradicție

$\Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = n$

$\Rightarrow (1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n) = \underbrace{(1+n)(1+n)...(1+n)}_{de\ n\ ori} = (1+n)^n$