Clasa a X-a - Etapa IV - Problema 2

Enunţ. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare. Determinaţi toate valorile reale ale numărului real x pentru care

$$f\left(x^3\right) + f\left(x^{2019}\right) = f\left(x^2\right) + f\left(x^{2018}\right).$$

Soluţie. Se observă că $x = 0$ şi $x = 1$ satisfac egalitatea.

Dacă $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ atunci $x^3 < x^2$ şi $x^{2019} < x^{2018}$. Monotonia funcţiei f conduce la $f(x^3) + f(x^{2019}) < f(x^2) + f(x^{2018})$.

Dacă $x \in (1, \infty)$ atunci $x^3 > x^2$ şi $x^{2019} > x^{2018}$. Monotonia funcţiei f conduce la $f(x^3) + f(x^{2019}) > f(x^2) + f(x^{2018})$. Deci 0 şi 1 sunt singurele valori convenabile. $\square$