

Problema 2

Fiind date numerele complexe z, z_1, z_2 astfel încât $|z_1| = |z_2| = 6$ și $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$, determinați valoarea minimă a expresiei

$$E = \sqrt{2}|(z - z_1)(z - z_2)| + |z(z - z_1)| + |z(z - z_2)|.$$

Soluție.

Folosind condițiile, putem scrie

$$6E = |(z - z_1)(z - z_2)(z_1 - z_2)| + |zz_1(z - z_1)| + |zz_2(z - z_2)|.$$

Folosind inegalitatea modulului vom obține

$$\begin{aligned} 6E &\geq |(z - z_1)(z - z_2)(z_1 - z_2) - zz_1(z - z_1) + zz_2(z - z_2)| = \\ &= |z_1z_2(z_1 - z_2)| = 216\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Avem $E \geq 36\sqrt{2}$ cu egalitate pentru $z = 0$, deci valoarea minimă a lui E este $36\sqrt{2}$.