Problema 3. Se consideră numerele naturale a şi b astfel încât $(a+2)(a-2) = 30b+1017$. Arătaţi că există un multiplu al lui a format numai cu cifre egale cu 1.

Mihai Bunget, Târgu Jiu

SOLUŢIE:

Din relaţia dată $(a+2)(a-2)=30b+1017$ obţinem

$a(a-2)+2(a-2)=30b+1017 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-2a+2a-4=30b+1017 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-4=30b+1017 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2=30b+1021$

De aici reiese că a^2 este număr impar $\Rightarrow a$ este impar $\Rightarrow 2 \nmid a$ (1)

Totodată din $a^2=30b+1021$ reiese că $a^2=M_5+1 \Rightarrow 5 \nmid a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \nmid a$ (2)

Fie următoarele $a+1$ numere:

1

11

111

$\dots\dots$

$\underbrace{111\dots11}_{a+1 \text{ cifre}}$

Atunci există cel puţin 2 dintre aceste nr care împărţite la a dau acelaşi rest.

Fie $\underbrace{111\dots111}_{k \text{ cifre}}$ şi $\underbrace{111\dots111}_{i \text{ cifre}}$ cele 2 nr, cu $k<i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ diferenţa lor este $M=\underbrace{111\dots11}_{i \text{ cifre}}-\underbrace{11\dots111}_{k \text{ cifre}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ diferența lor este: $M = \underbrace{11...11}_{i-k \text{ cifre}}\underbrace{00...00}_{k \text{ cifre}} = \underbrace{111...1}_{i-k \text{ cifre}} \cdot 10^k$ și este $M_a \Rightarrow$

$\Rightarrow a \mid \underbrace{111...1}_{i-k \text{ cifre}} \cdot 10^k$

Dar din (1) și (2) reiese că (a și 10^k) prime între ele $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \mid \underbrace{111...11}_{i-k \text{ cifre}}$

În concluzie, există un multiplu al lui a format numai din cifre de 1.

Andronache Mara Ruxandra
Școala Gimnazială „Constantin Brâncuși"
Clasa a VI-a A
București