Problemă. Aflați toate numerele naturale m, n, p, q care verifică egalitatea

$$3^m + 5^n + 6^p + 7^q = 47$$

Vasile Chiriac, Bacău

SOLUŢIE:

$$3^m + 5^n + 6^p + 7^q = 47$$

Se observă că pentru $q \geq 2$ egalitatea devine imposibilă ($7^2 = 49 > 47$) și atunci $\Rightarrow$ **q** $\in$ **{0, 1}**

1. q = 1

Relația poate fi scrisă acum:

$$3^m + 5^n + 6^p + 7^1 = 47$$
$$3^m + 5^n + 6^p + 7 = 47$$
$$3^m + 5^n + 6^p = 40$$

Se observă că pentru $p \geq 3$ egalitatea devine imposibilă ($6^3 > 40$) și atunci

$\Rightarrow$ **p** $\in$ **{0, 1, 2}**

1.1 p = 0

$3^m + 5^n + 6^0 = 40$

$3^m + 5^n + 1 = 40$

$3^m + 5^n = 39$ $\Rightarrow$ **n** $\in$ **{0, 1, 2}**

- n = 0 $\Rightarrow 3^m = 38$ *fals*
- n = 1 $\Rightarrow 3^m = 34$ *fals*
- n = 2 $\Rightarrow 3^m = 14$ *fals*

1.2 p = 1

$3^m + 5^n + 6^1 = 40$

$3^m + 5^n + 6 = 40$

$3^m + 5^n = 34$ $\Rightarrow$ **n** $\in$ **{0, 1, 2}**

- n = 0 $\Rightarrow 3^m = 33$ *fals*
- n = 1 $\Rightarrow 3^m = 29$ *fals*
- **n = 2** $\Rightarrow 3^m = 9$ $\Rightarrow$ **m = 2**

soluție: q = 1; p = 1; n = 2; m = 2 **[I]**

1.3 p = 2

$3^m + 5^n + 6^2 = 40$

$3^m + 5^n + 36 = 40$

$3^m + 5^n = 4$, cu singura soluție n = 0 și atunci

$3^m + 5^0 = 4$
$3^m + 1 = 4$
$3^m = 3 \quad \Rightarrow \underline{m = 1}$

soluție: $\underline{q = 1; p = 2; n = 0; m = 1}$ **[II]**

2. q = 0
Relația poate fi scrisă acum:

$$3^m + 5^n + 6^p + 7^0 = 47$$
$$3^m + 5^n + 6^p + 1 = 47$$
$$3^m + 5^n + 6^p = 46$$

Se observă că pentru p ≥ 3 egalitatea devine imposibilă ($6^3 > 46$) și atunci

$\Rightarrow$ **p** $\in$ **{0, 1, 2}**

2.1 p = 0
$3^m + 5^n + 6^0 = 46$
$3^m + 5^n + 1 = 46$
$3^m + 5^n = 45 \quad \Rightarrow$ **n** $\in$ **{0, 1, 2}**

- n = 0 $\Rightarrow 3^m = 44$ *fals*
- n = 1 $\Rightarrow 3^m = 40$ *fals*
- n = 2 $\Rightarrow 3^m = 20$ *fals*

2.2 p = 1
$3^m + 5^n + 6^1 = 46$
$3^m + 5^n + 6 = 46$
$3^m + 5^n = 40 \quad \Rightarrow$ **n** $\in$ **{0, 1, 2}**

- n = 0 $\Rightarrow 3^m = 39$ *fals*
- n = 1 $\Rightarrow 3^m = 35$ *fals*
- n = 2 $\Rightarrow 3^m = 15$ *fals*

2.3 p = 2
$3^m + 5^n + 6^2 = 46$
$3^m + 5^n + 36 = 46$
$3^m + 5^n = 10 \quad \Rightarrow$ **n** $\in$ **{0, 1}**

- **$\underline{n = 0}$** $\Rightarrow 3^m = 9 \quad \Rightarrow$ **$\underline{m = 2}$**

soluție: $\underline{q = 0; p = 2; n = 0; m = 2}$ **[III]**

- n = 1 $\Rightarrow 3^m = 5$ *fals*

RĂSPUNS:
În concluzie, avem următoarele soluții:

- **q = 1; p = 1; n = 2; m = 2**

V: $3^m + 5^n + 6^p + 7^q = 47$
$3^2 + 5^2 + 6^1 + 7^1 = 47$
$9 + 25 + 6 + 7 = 47$
$47 = 47$

- **q = 1; p = 2; n = 0; m = 1**

V: $3^m + 5^n + 6^p + 7^q = 47$
$3^1 + 5^0 + 6^2 + 7^1 = 47$
$3 + 1 + 36 + 7 = 47$
$47 = 47$

- **q = 0; p = 2; n = 0; m = 2**

V: $3^m + 5^n + 6^p + 7^q = 47$
$3^2 + 5^0 + 6^2 + 7^0 = 47$
$9 + 1 + 36 + 1 = 47$
$47 = 47$