Problema 1
Etapa 6

Clasa a IX – a

Problema 1. Pentru orice numere reale strict pozitive *a* şi *b*, cu $a+b=1$, se consideră expresiile $E(a,b)=\sqrt{1+2a}+\sqrt{1+2b}$ şi $F(a,b)=\dfrac{1}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{b}}$. Determinaţi valoarea maximă a expresiei *E(a,b)* şi valoarea minimă a expresiei *F(a,b).*

Ioan V. Maftei, Bucureşti

Soluţie:

○ Inegalitatea C.B.S conduce la $\left(1\cdot\sqrt{1+2a}+1\cdot\sqrt{1+2b}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\cdot(1+2a+1+2b)=8$, de unde $E_{\max}=2\sqrt{2}$.

○ $F(a,b)=\dfrac{1+\sqrt{a}}{1-a}+\dfrac{1+\sqrt{b}}{1-b}=\dfrac{1+\sqrt{a}}{b}+\dfrac{1+\sqrt{b}}{a}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{\sqrt{a}}{b}+\dfrac{\sqrt{b}}{a}$

* $\dfrac{a+b}{2}\ge\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge4$ (1) (care se obţine pentru $a=b=\frac{1}{2}$).

* $\dfrac{\sqrt{a}}{b}+\dfrac{\sqrt{b}}{a}\ge2\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}}{b}\cdot\dfrac{\sqrt{b}}{a}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{ab}}\ge2\sqrt{2}$ (2)

* din (1) şi (2) se ajunge la $F_{\min}=4+2\sqrt{2}$ (care se obţine pentru $a=b=\frac{1}{2}$).