

Clasa a X-a - Problema 1

Enunț: Fie $n, p \in \mathbb{N}$, $n > p \geq 2$, prime între ele și $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, astfel încât $\sqrt[n]{a^p} \in \mathbb{Q}$.
Demonstrați că $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q}$.

Soluție. Dacă n, p sunt prime între ele atunci există $u, v \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$pu - bv = 1. \text{ Atunci } \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{pu - bv}} = \frac{\sqrt[n]{a^{pu}}}{\sqrt[n]{a^{bv}}} = \frac{\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^u}{a^v} \in \mathbb{Q}.$$