

PROBLEME DE NUMĂRARE

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva aspecte teoretice însoțite de probleme prin care se pun în evidență unele modalități de a se realiza numărarea în diferite situații.

Lecția se adresează clasei a V-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București

De la început trebuie să remarcăm faptul că problemele de numărare sunt în general probleme care nu se adresează unei clase anume. În cele mai multe cazuri rezolvarea unei probleme de numărare nu necesită cunoștințe foarte avansate de matematică. Pentru o mai bună înțelegere a temei vom rezolva împreună câteva probleme de acest gen pe care le vom comenta.

Problema 1: La începutul programului casiera de la casa de bilete a unui teatru constată că primul bilet vândut are numărul 25437. La sfârșitul programului aceasta constată că ultimul bilet vândut are numărul 25643. Câte bilete a vândut casiera?

Soluție: Vom gândi astfel: să presupunem că s-au vândut n bilete și că primul bilet vândut este reprezentat de segmentul din figura de mai jos.



În continuare vom reprezenta prin segmente numerele celorlalte bilete vândute.

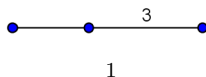
Biletul 2



Biletul 3

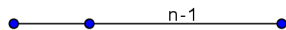


Biletul 4



Observând că la biletul 2 adunăm 1, la biletul 3 adunăm 2, la biletul 4 adunăm 3, putem afirma că la biletul n vom aduna $n - 1$.

Biletul n



Cum numărul biletului 1 este 25437, iar numărul biletului n este 25643 înseamnă că $n - 1 = 25643 - 25437$ sau $n - 1 = 206$, de unde $n = 207$.

În concluzie s-au vândut 207 bilete.

Putem acum să răspundem la întrebarea: "Fie a și b două numere naturale, $a < b$. Câte numere naturale avem de la a până la b ?"

Procedând ca mai sus întrebarea noastră poate avea trei răspunsuri.

1. Dacă sunt numărate și numerele a și b , atunci vom avea $b - a + 1$ numere;

2. Dacă este numărat numai unul dintre numerele a și b , atunci vom avea $b - a$ numere;

3. Dacă nu se numără nici a nici b , atunci vom avea $b - a - 1$ numere.

Problema se poate rezolva asemănător și în cazul în care numerele nu sunt consecutive, dar cresc cu aceeași valoare, r . În acest caz, dacă a și b sunt primul, respectiv ultimul număr din secvență, atunci numărul de numere este egal cu $(b - a) : r + 1$.

Exemplu: Avem numerele 3; 7, 11; 15, ..., 51. Câte numere sunt în această secvență?

Se observă că, începând cu al doilea, fiecare număr este cu 4 mai mare decât precedentul. Atunci numărul de numere din secvență va fi $(51 - 3) : 4 + 1$, adică 13.

Problema 2: Câte numere de trei cifre se pot forma astfel încât cifra sutelor să fie 2, 4, 5 sau 7, cifra zecilor să fie 3 sau 5, iar cifra unităților să fie 0, 1, 2, 3 sau 4?

Soluție: Gândim astfel. Cifra sutelor poate avea 4 valori: 2, 4, 5 sau 7. Pentru o valoare a cifrei sutelor (să zicem 2) cifra zecilor poate avea 2 valori: 3 sau 5. Înseamnă că atunci când am fixat și cifra sutelor și cifra zecilor avem 4×2 numere. Pentru fiecare dintre aceste numere cifra unităților poate avea 5 valori: 0, 1, 2, 3 sau 4. Rezultă că în total sunt $4 \times 2 \times 5$ numere, adică 40 de numere.

Problema de mai sus ne arată că dacă avem de efectuat mai multe operații succesive (O_1, O_2, \dots, O_p) și fiecare operație poate fi efectuată într-un număr de moduri (O_1 în m_1 moduri, O_2 în m_2 moduri, ..., O_p în m_p moduri), atunci succesiunea tuturor operațiilor poate fi efectuată în $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_p$ moduri.

În problema prezentată mai sus operațiile succesive sunt: O_1 : înlocuirea cifrei sutelor, iar numărul de moduri este $m_1 = 4$, O_2 : înlocuirea cifrei zecilor, iar numărul de moduri este $m_2 = 2$ și O_3 : înlocuirea cifrei unităților, iar numărul de moduri este $m_3 = 5$.

Problema 3: Un ogar aleargă pe o pistă ca cea din figura de mai jos. La fiecare salt parcurge 4 căsuțe. În care căsuță se va afla după 157 de salturi?

I	H	G	F	E	D
J					C
K					B
L					A
M	N	O	P	Q	START

Soluție: Ne gândim că pentru o numărare mai rapidă ar fi minunat ca după un număr de salturi ogarul să ajungă din nou în căsuța de start. Să vedem dacă acest lucru se întâmplă. La saltul 1 ogarul este în căsuța D ; la saltul 2 se află în căsuța H ; la saltul 3 se află în căsuța L ; la saltul 4 se află în căsuța P ; la saltul 5 se află în căsuța B ; la saltul 6 se află în căsuța F ; la saltul 7 se află în căsuța J ; la saltul 8 se află în căsuța N ; la saltul 9 se află în căsuța $START$. Deci, la fiecare 9 salturi ogarul revine în căsuța $START$. Atunci ne întrebăm de câte ori se cuprinde 9 în 157? În urma împărțirii $(157:9)$ obținem câtul 17 și restul 4. Asta înseamnă că ogarul face 17 ture de câte 9 salturi și apoi mai face 4 salturi. După cele 17 ture se va afla în căsuța $START$. Acum, până la cel de-al 157-lea salt mai are de efectuat 4 salturi. Deci se va afla în căsuța P .

Să remarcăm că la acest gen de problemă munca ne-a fost ușurată de faptul că fenomenul se repetă după un număr de pași, adică se ajunge în situația de la care s-a pornit.

Și acum să rezolvăm împreună câteva probleme.

Problema 1. La un turneu de fotbal participă n echipe, care joacă fiecare cu fiecare câte un meci. Câte meciuri se joacă în total în turneu?

Soluția 1: Să numim echipele $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$.

Pentru început avem meciurile:

E_1 cu E_2, E_1 cu E_3, E_1 cu E_4, \dots, E_1 cu E_n , în total $n - 1$ meciuri.

Apoi,

E_2 cu E_3, E_2 cu E_4, E_2 cu E_5, \dots, E_2 cu E_n , în total $n - 2$ meciuri.

Atenție! E_2 a jucat deja cu E_1 .

În continuare avem

E_3 cu E_4, E_3 cu E_5, E_3 cu E_6, \dots, E_3 cu E_n , în total $n - 3$ meciuri.

.....
 E_{n-1} cu E_n adică 1 meci.

Atunci, numărul total de meciuri va fi

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1).$$

Rezultatul acestei sume este, așa cum ne-a învățat Gauss, $n(n - 1) : 2$.

Soluția 2: Problema poate fi privită și astfel: *Orice meci se desfășoară între două echipe.*

Atunci, prima echipă poate fi aleasă în n moduri, iar a doua echipă în $n - 1$ moduri.

Atenție! În acest fel meciurile au fost numărate de două ori. Am numărat și E_1 cu E_2 , dar și E_2 cu E_1 , etc.

Acestea fiind spuse, folosind *regula produsului*, numărul de meciuri este $n(n - 1) : 2$.

Comentariu. Cele două rezolvări pot reprezenta o justificare a faptului că

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = n(n - 1) : 2.$$

Problema 2. Se consideră tabloul pătratic

1	2	3	...	25
26	27	28	...	50
51	52	53	...	75
...
601	602	603	...	625

Aflați numărul scris în centrul tabloului.

Soluție. Trebuie să stabilim în primul rând care este centrul acestui tablou. Evident tabloul are 25 de coloane și tot atâtea linii (rânduri). Înseamnă că centrul tabloului este acolo unde se intersectează coloana a treisprezecea cu linia a treisprezecea.

Pe fiecare linie numerele sunt consecutive. Astfel pe locul doi este numărul de pe primul loc plus 1, pe locul trei este numărul de pe primul loc plus 2 și așa mai departe. Pe locul 13 va fi numărul de pe primul loc plus 12.

Să vedem acum care este numărul cu care începe linia a treisprezecea.

Observăm

$$\text{Linia 1 începe cu 1, iar } 1 = 25 \cdot 0 + 1$$

$$\text{Linia 2 începe cu 26, iar } 26 = 25 \cdot 1 + 1$$

$$\text{Linia 3 începe cu 51, iar } 51 = 25 \cdot 2 + 1$$

.....
 $\text{Linia 25 începe cu 601, iar } 601 = 25 \cdot 24 + 1$

Atunci

$$\text{Linia 13 începe cu } 25 \cdot 12 + 1 = 301.$$

În aceste condiții numărul din centrul tabloului va fi

$$301 + 12 = 313.$$

Problema 3. Un număr natural se numește *palindrom* dacă el coincide cu răsturnatul său. Câte numere *palindrom* de 5 cifre există.

Soluție. Dacă numărul este *palindrom*, atunci are forma \overline{abcba} , unde cifrele a, b, c pot fi și egale. Deoarece a poate fi înlocuită cu 9 cifre (nu poate fi 0), b poate fi înlocuit cu 10 cifre, iar c tot cu 10 cifre, înseamnă că vom avea

$$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$$

de numere *palindrom*.

Problema 4. Pe 1 ianuarie 2005 două vapoare pleacă din portul Constanța. Primul stă pe mare 15 zile, se întoarce pentru 3 zile, apoi pleacă din nou în cursă. Al doilea stă pe mare 20 de zile, se întoarce pentru 4 zile, apoi pleacă din nou în cursă.

a) De câte ori, pe parcursul anului 2005, cele două vapoare vor pleca simultan din Constanța?

b) Câte zile din 2005, cele două vapoare se vor afla în port în același timp?

Soluție. a) Vom numi PAS numărul de zile petrecute pe mare plus numărul de zile petrecute în port de un vapor.

Pentru primul vapor 1 PAS are 18 zile (15+3), iar pentru al doilea vapor 1 PAS are 24 de zile (20+4).

Numărul de zile până la următoarea plecare simultană din port înseamnă un număr întreg de PAȘI parcurși de cele două vapoare. Asta înseamnă că numărul de zile până la următoarea plecare simultană este atât multiplu al lui 18 cât și multiplu al lui 24. Altfel spus, dacă primul vapor face n PAȘI, iar al doilea m PAȘI, atunci

$$18 \cdot n = 24 \cdot m$$

sau, prin împărțire la 6 avem

$$3 \cdot n = 4 \cdot m$$

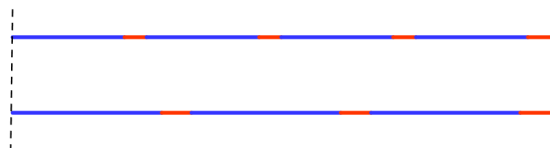
Trebuie găsite cele mai mici numere naturale pentru care egalitatea de mai sus este adevărată. Se observă imediat că pentru $n = 4$ și $m = 3$ egalitatea este adevărată.

Înseamnă că numărul de zile până la următoarea plecare simultană din port este 72 (18 · 4 sau 24 · 3).

Pentru a vedea de câte ori, pe parcursul anului 2005, cele două vapoare pleacă simultan din port trebuie să vedem de câte ori se cuprinde 72 în 365 (numărul de zile dintr-un an).

Cum 365 împărțit la 72 dă câtul 5 și restul tot 5 înseamnă că vapoarele pleacă simultan din port de 6 ori (Să nu uităm de plecarea de la 1 ianuarie!)

b) În desenul de mai jos am reprezentat ce se întâmplă într-un interval de 72 de zile. Segmentele albastre reprezintă numărul zilelor petrecute pe mare, iar segmentele roșii reprezintă numărul zilelor petrecute în port.



Se observă că singura perioadă când cele două vapoare se află în același timp în port este la sfârșitul celor 72 de zile. Cele două vapoare stau în același timp în port timp de 3 zile.

Cum cele două vapoare pleacă simultan din port de 5 ori (aici nu trebuie să mai numărăm plecarea din 1 ianuarie) înseamnă că ele se vor afla în același timp în port timp de

$$3 \cdot 5 = 15 \text{ (zile)}$$

Bibliografie:

[1] Ghioca A, Cojocaru L, Matematica gimnazială dincolo de manual, Editura GIL, 2005

[2] Schwarz D, Popa G, Probleme de numărare, Editura GIL, 2007