**Problema 2.** Fie $n \geq 3$ un număr natural şi

$$A = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., \frac{n-1}{n} \right\}$$

Arătaţi că numărul fracţiilor ireductibile din mulţimea $A$ este par.

*Adrian Ghioca*

Soluție: Verificăm enunțul pentru:

$m = 3 \Rightarrow A = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right\} \rightarrow$ 2 fracții ireductibile;

$m = 4 \Rightarrow A = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right\} \rightarrow$ 2 fracții ireductibile;

$m = 5 \Rightarrow A = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\} \rightarrow$ 4 fracții ireductibile;

În general avem proprietatea (P):

(P) Fracțiile $\frac{K}{m}$ și $\frac{m-K}{m}$, $m \geq 3$, $m \in N$ și $K < m$, $K \in N$ sunt simultan ireductibile;

Dem „$\Rightarrow$" „Dacă $\frac{K}{m}$ este ireductibilă, atunci $\frac{m-K}{m}$ este ireductibilă"

Fie $d \mid m-K$ și $d \mid m \Rightarrow d \mid m-(m-K) \Rightarrow d \mid K$
Dar $(K, m) = 1$
$\Bigg\} \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \underbrace{(m-K, m) = 1}_{\frac{m-K}{m} \text{ ired.}}$

Reciproc „$\Leftarrow$" „Dacă $\frac{m-K}{m}$ este ireductibilă, atunci $\frac{K}{m}$ este ireductibilă.

Fie $d \mid K$ și $d \mid m \Rightarrow d \mid m-K$
Dar $(m-K, m) = 1$
$\Bigg\} \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (K, m) = 1 \Rightarrow \frac{K}{m}$ ired.

Conform propr. (P), fiecărei fracții $\frac{K}{m}$ ireductibile din A îi corespunde o fracție $\frac{m-K}{K}$ ireductibilă, $K < m$; evident $\frac{K-m}{m}$ este elem. al mulțimii A.

$\Rightarrow$ nr. fracțiilor ireductibile din A este nr. par

Obs: Dacă $\frac{K}{m} = \frac{m-K}{m}$ atunci $K = m-K \Rightarrow m = 2K \Rightarrow \frac{K}{m} = \frac{K}{2K}$ deci $\frac{K}{m}$ nu este ireductibilă; Rezultă că fracțiile ireductibile $\frac{K}{m}$ și $\frac{m-K}{m}$ sunt distincte, deci în orice situație există o pereche.

Problemă rezolvată de eleva:
Rusu Ruxandra (cl. a VI-a)
Șc. Gimnazială „M. Kogălniceanu"
Dorohoi, Botoșani