Problema 3. Pe latura $(OX$ a unghiului $\sphericalangle XOY$ se consideră punctele fixe A, B, C astfel încât $OA < OB < OC$, iar pe latura $(OY$ se consideră punctul mobil M. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$ intersectează CM în punctul N, iar dreptele AN şi BM se intersectează în punctul P. Se cere locul geometric al punctului P atunci când punctul $M \in (OY$ variază.

adaptarea unei probleme din *C. Udrişte, V. Tomuleanu – Manual de geometrie analitică*, EDP 1985

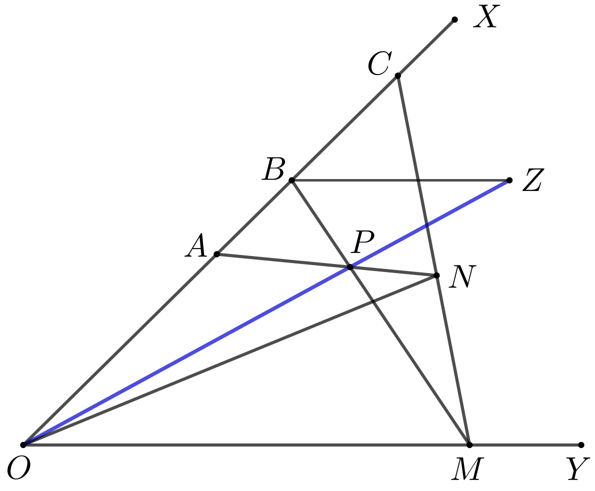
Din teorema bisectoarei, $\dfrac{OM}{OC} = \dfrac{MN}{NC}$, iar din teorema lui Menelaus aplicată triunghiului MBC tăiat de transversala $A - P - N$ obţinem că $\dfrac{MN}{NC} \cdot \dfrac{AC}{AB} \cdot \dfrac{BP}{PM} = 1$. Deducem că $\dfrac{OM \cdot PB}{PM} = \dfrac{OC \cdot AB}{AC}$, adică o expresie constantă (nu depinde de poziţia punctului M). Să notăm $\dfrac{OC \cdot AB}{AC} = k$.
Pe paralela prin B la OY, în interiorul unghiului $\sphericalangle XOY$, considerăm punctul (fix) Z astfel încât $BZ = k$. Atunci $\dfrac{BP}{PM} = \dfrac{BZ}{OM}$. Cum $\sphericalangle OMP \equiv \sphericalangle ZBP$, deducem că triunghiurile OMP şi ZBP sunt asemenea, deci $\sphericalangle OPM \equiv \sphericalangle ZPB$. Cum O şi Z sunt de părţi diferite ale dreptei BM, cele două unghiuri sunt opuse la vârf, deci punctele O, P, Z sunt coliniare. Cu alte cuvinte, punctul P aparţine segmentului (OZ).

Vom arăta că locul geometric căutat este segmentul (OZ). Am arătat o incluziune: orice punct P cu proprietatea din enunţ se găseşte pe segmentul (OZ). Vom demonstra acum că, reciproc, orice punct P de pe segmentul (OZ) se poate obţine ca în enunţ.
Fie, aşadar, $P \in (OZ)$. Fie $\{M\} = BP \cap OY$ (există) şi N punctul de intersecţie a segmentului (MC) cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$. Demonstrăm că $P \in AN$.
Din teorema bisectoarei, $\dfrac{MN}{NC} = \dfrac{OM}{OC}$. Cum $OM \parallel BZ$, triunghiurile OMP şi ZBP sunt asemenea, deci $\dfrac{MP}{BP} = \dfrac{OM}{BZ} = \dfrac{OM}{k} = \dfrac{OM}{OC} \cdot \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{MN}{NC} \cdot \dfrac{AC}{AB}$.
Obţinem, aşadar, relaţia

$$\frac{MN}{NC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BP}{MP} = 1.$$

Cum $N \in (MC)$, $A \in BC \setminus [BC]$ şi $P \in (BM)$, reciproca teoremei lui Menelaus arată că $\{P\} = AN \cap BM$.

În concluzie, locul geometric căutat este segmentul (OZ).



X
C
B
Z
A
P
N
O
M
Y