SOLUȚIE

Problema 1

Fie $a,b\in(1,\infty)$ cu $a>b>1$. Rezolvați ecuația

$$a^{\log_b\left(x-\frac{a-b}{2}\right)}-a=b^{\log_a\left(x-\frac{b-a}{2}\right)}-b.$$

Mihai Opincariu

Soluție.

Fie $c=\dfrac{a-b}{2}$. Este necesar ca $x>c$. Ecuația se scrie echivalent:

$$a^{\log_b(x-c)}-c=b^{\log_a(x+c)}+c \qquad (1)$$

Notăm $a^{\log_b(x-c)}-c=y \;\Rightarrow\; a^{\log_b(x-c)}=y+c \;\Rightarrow\; \log_b(x-c)=\log_a(y+c)$ $\qquad (2)$

Din $(1) \;\Rightarrow\; b^{\log_a(x+c)}+c=y \;\Rightarrow\; b^{\log_a(x+c)}=y-c \;\Rightarrow\; \log_a(x+c)=\log_b(y-c)$ $\qquad (3)$

Fie $f:(c,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_b(x-c)+\log_a(x+c)$. Deoarece funcția f este strict crescătoare, (sumă de funcții strict crescătoare), deducem că f este injectivă.

Dar din relațiile (2) și (3) avem că $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y \Rightarrow a^{\log_b(x-c)}-c=x$.

Fie $t=\log_b(x-c)$. Ultima ecuație se scrie $a^t-c=b^t+c \;\Leftrightarrow\; 1=\dfrac{2c}{a^t}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^t$, ecuație cu soluție unica $t=1$ (din argumente de monotonie). Rezultă că $b=x-c$, de unde obținem $x=b+\dfrac{a-b}{2}$, deci $x=\dfrac{a+b}{2}$ este unica soluție a ecuației date.