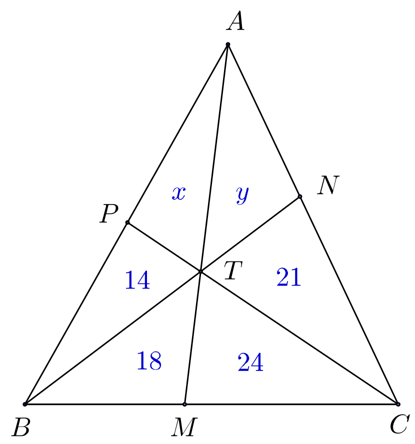
Problema 3. Fie ABC un triunghi şi $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ puncte astfel încât AM, BN şi CP sunt concurente într-un punct T. Ştiind că ariile $\mathcal{S}(TPB) = 14$, $\mathcal{S}(TBM) = 18$, $\mathcal{S}(TMC) = 24$ şi $\mathcal{S}(TCN) = 21$, aflaţi aria triunghiului ABC.

* * *

Soluţie:
Notăm cu $x = \mathcal{S}(APT)$ şi $y = \mathcal{S}(NAT)$.
Avem că $\frac{MB}{MC} = \frac{MB \cdot d(A, BC)}{MC \cdot d(A, BC)} = \frac{2\mathcal{S}(AMB)}{2\mathcal{S}(AMC)} = \frac{18 + 14 + x}{24 + 21 + y} = \frac{32 + x}{45 + y}$, iar, pe de altă parte, $\frac{MB}{MC} = \frac{MB \cdot d(T, BC)}{MC \cdot d(T, BC)} = \frac{2\mathcal{S}(TMB)}{2\mathcal{S}(TMC)} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$. Din cele două relaţii de mai sus, deducem că $\frac{32 + x}{45 + y} = \frac{3}{4}$ (1).
Analog, scriind în două moduri raportul $\frac{NC}{NA}$, obţinem $\frac{18 + 24 + 21}{14 + x + y} = \frac{21}{y} = \frac{18 + 24}{14 + x} = \frac{42}{14 + x}$, de unde $2y = 14 + x$, deci $x = 2y - 14$. Revenind la relaţia (1), obţinem $4(32+2y-14) = 3(45+y)$, de unde $y = \frac{63}{5} = 12,6$. Atunci $x = 2y - 14 = 11,2$, iar aria triunghiului ABC este $\mathcal{S}(ABC) = x+y+21+24+18+14 = 100,8$.



Remarcă: Scriind în două moduri şi raportul $\frac{AP}{PB}$ am fi obţinut o a treia relaţie în x, y, anume $\frac{x + y + 21}{14 + 18 + 24} = \frac{x}{14}$. Şi această ecuaţie este verificată de valorile găsite pentru x şi y astfel încât pentru aflarea valorilor lui x şi y am fi putut folosi oricare două din cele trei ecuaţii. Faptul că aceste trei relaţii sunt legate se datorează teoremei lui Ceva: avem $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$, adică $\frac{x}{14} \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{21}{y} = 1$ şi, totodată, $\frac{x+y+21}{14+18+24} \cdot \frac{18+14+x}{24+21+y} \cdot \frac{18+24+21}{14+x+y}$. Astfel, dacă impunem două dintre condiţiile $\frac{18}{24} = \frac{18+14+x}{24+21+y}$, $\frac{21}{y} = \frac{18+24+21}{14+x+y}$ şi $\frac{x}{14} = \frac{x+y+21}{14+18+24}$, cea de-a treia rezultă în mod automat.