Etapa 7, Problema 4[1]

Pe un cerc se consideră, în sens invers trigonometric, punctele A_0, B_0, C_0, D_0. Notăm cu A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele arcelor A_0B_0, B_0C_0, C_0D_0 respectiv D_0A_0, apoi cu A_2, B_2, C_2, D_2 mijloacele arcelor A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 respectiv D_1A_1, ..., cu A_n, B_n, C_n, D_n mijloacele arcelor $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}$ respectiv $D_{n-1}A_{n-1}$ etc.

Demonstraţi că, dacă n creşte nemărginit, punctele A_n, B_n, C_n şi D_n tind către vârfurile unui pătrat.

Soluţie.

Notăm lungimile arcelor $A_{i-1}B_{i-1}, B_{i-1}C_{i-1}, C_{i-1}D_{i-1}$ respectiv $D_{i-1}A_{i-1}$ cu a_i, b_i, c_i respectiv d_i, pentru fiecare $i = 0, 1, 2, ..., n$. Calculând a_i, b_i, c_i, d_i în funcţie de a_0, b_0, c_0, d_0 pentru valorile mici ale lui i, suntem conduşi să presupunem că

$$a_n = \frac{1}{2^n}\left(C_n^0 a_0 + C_n^1 b_0 + C_n^2 c_0 + C_n^3 d_0 + C_n^4 a_0 + ...\right),$$

$$b_n = \frac{1}{2^n}\left(C_n^0 b_0 + C_n^1 c_0 + C_n^2 d_0 + C_n^3 a_0 + C_n^4 b_0 + ...\right),$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}\left(C_n^0 c_0 + C_n^1 d_0 + C_n^2 a_0 + C_n^3 b_0 + C_n^4 c_0 + ...\right),$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}\left(C_n^0 d_0 + C_n^1 a_0 + C_n^2 b_0 + C_n^3 c_0 + C_n^4 d_0 + ...\right),$$

iar aceste egalităţi se demonstrează prin inducţie matematică.

Sunt însă cunoscute formulele

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + ... = 2^{n-2}\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\cos\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + ... = 2^{n-2}\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + ... = 2^{n-2}\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\cos\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + ... = 2^{n-2}\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

(Propunem concurenţilor să demonstreze aceste egalităţi!) Înlocuind, obţinem că

$$a_n = \frac{a_0}{4}\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\cos\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{b_0}{4}\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\sin\frac{n\pi}{4}\right) +$$

[1] Selectată din culegerea **Niculae Negoescu** - *Probleme cu ... probleme*, Ed. Facla, 1975

$$+\frac{c_0}{4}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)+\frac{d_0}{4}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

de unde $\lim a_n = \frac{a_0+b_0+c_0+d_0}{4}$, adică a_n tinde către un sfert din lungimea cercului. Analog se procedează în cazul celorlaltor şiruri considerate şi, astfel, este adevărată concluzia problemei.