Problema 1. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel încât $abc = 1$. Arătaţi că, dacă $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = \dfrac{3}{2}$, atunci unul dintre numerele a, b, c este egal cu 1.

Concursul *Al. Myller*

Soluţie. Prin aducere la acelaşi numitor, relaţia din enunţ devine $2[(a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (c+1)(a+1)] = 3(a+1)(b+1)(c+1)$ sau $2[ab + bc + ca + 2(a+b+c) + 3] = 3(abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1)$. Ţinând cont că $abc = 1$, obţinem $a + b + c = ab + bc + ca$. Scriind această identitate sub forma $abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 = 0$, deducem că $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$, prin urmare $a = 1$ sau $b = 1$ sau $c = 1$.