Etapa 2, Problema 4

Determinați mulțimile finite S de puncte din plan, conținând măcar trei puncte, care au proprietatea:

oricare ar fi A, B elemente disticte ale lui S, mediatoarea segmentului AB este axă de simetrie a lui S.

O.I.M. 1999

Soluție.

Dacă S este mulțimea vârfurilor unui poligon regulat, este evident îndeplinită condiția din enunț. Reciproc, vom arăta că orice mulțime S care satisface ipotezele problemei este mulțimea vârfurilor unui poligon regulat.

Fie $S=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ și $a_1,a_2,...,a_n$ afixele punctelor din S. Considerăm centrul de greutate G al mulțimii S, de afix $g=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$. Dacă A_i,A_j aparțin lui S și d este mediatoarea lui A_iA_j, notăm cu s simetria față de dreapta d. Observăm că $s(a_1),s(a_2),...,s(a_n)$ sunt chiar $a_1,a_2,...,a_n$, într-o ordine oarecare. Prin urmare, $s(g)=g$ și atunci $G\in d$. Rezultă că $GA_i=GA_j$, $\forall i,j\in\{1,2,...,n\}$, așadar punctele $A_1,A_2,...,A_n$ sunt conciclice.

Fie acum A_1,A_2,A_3 puncte consecutive pe cerc. Considerând simetria față de mediatoarea lui A_1A_3, deducem ușor că A_2 se află pe această mediatoare, deci $A_1A_2=A_2A_3$. Repetând raționamentul, obținem că poligonul având ca vârfuri punctele $A_1,A_2,...,A_n$ are toate laturile egale. Fiind și inscriptibil, acest poligon va fi regulat.