Problemă. Demonstraţi că, fiind dat un număr întreg strict pozitiv n, numărul $\frac{1}{n}$ are o reprezentare finită în baza de numeraţie 60 dacă şi numai dacă $n = 2^i 3^j 5^k$, pentru nişte întregi $i, j, k \geq 0$.

* * *

Soluţie Este acelaşi principiu de demonstraţie ca şi pentru baza 10, unde singurele fracţii $\frac{1}{n}$ care au o reprezentare finită sunt cele pentru care $n = 2^i 5^j$, pentru nişte întregi $i, j \geq 0$.

Una dintre implicaţii este imediată. Fie $m = \max\{i, j, k\}$; atunci $\frac{1}{n} = \frac{1}{2^i 3^j 5^k} = \frac{2^{m-i} 3^{m-j} 5^{m-k}}{60^m}$ (considerăm şi $n > 1$). Numărul $N = 2^{m-i} 3^{m-j} 5^{m-k}$ are o reprezentare unică în baza 60, de forma $N = a_1 \cdot 60^{m_1} + a_2 \cdot 60^{m_2} + \cdots + a_\ell \cdot 60^{m_\ell}$, unde $m > m_1 > m_2 > \cdots > m_\ell \geq 0$ şi $0 \leq a_t < 60$ pentru toţi $1 \leq t \leq \ell$. Rezultă $\frac{1}{n} = a_\ell \cdot 60^{m_\ell - m} + \cdots + a_2 \cdot 60^{m_2 - m} + a_1 \cdot 60^{m_1 - m}$, ceea ce dorim.

Pe de altă parte, dacă există un prim $p \neq 2, 3, 5$ astfel ca $p \mid n$, şi dacă presupunem $\frac{1}{n} = a_1 \cdot 60^{-m_1} + a_2 \cdot 60^{-m_2} + \cdots + a_\ell \cdot 60^{-m_\ell}$, unde $1 < m_1 < m_2 < \cdots < m_\ell$ şi $0 \leq a_t < 60$ pentru toţi $1 \leq t \leq \ell$, aducând la acelaşi numitor obţinem un numitor format numai din divizori primi ai lui 60, adică $2, 3$ şi 5, la diverse puteri, contradicţie.