Problema 3. Fie $p > 3$ un număr prim. Arătaţi că numărul $7^p - 6^p - 1$ este divizibil cu 43.

Olimpiadă Iran, 1999

Soluţie: Orice număr prim $p > 3$ este fie de forma $6n + 1$, fie de forma $6n + 5$.
Dacă $p = 6n + 1$, avem, modulo 43, că $7^p = 7 \cdot 7^{6n} = 7 \cdot 49^{3n} = 7 \cdot (43 + 6)^{3n} \equiv 7 \cdot 6^{3n} = 7 \cdot 216^n = 7 \cdot (43 \cdot 5 + 1)^n \equiv 7$ şi $6^p = 6 \cdot 6^{6n} = 6 \cdot 216^{2n} = 6 \cdot (5 \cdot 43 + 1)^{2n} \equiv 6 \pmod{43}$. Prin urmare, în acest caz, $7^p - 6^p - 1 \equiv 7 - 6 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$.
Dacă $p = 6n + 5$, se arată analog că $7^{6n} \equiv 1 \pmod{43}$ şi $6^{6n} \equiv 1 \pmod{43}$, deci $7^{6n+5} - 6^{6n+5} - 1 \equiv 7^5 - 6^5 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$, ultima echivalenţă verificându-se, de exemplu, prin calcul.

O altă cale de a demonstra că $7^5 - 6^5 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$, evitând calculele, este de a folosi că

dacă $(m, n) = 1$, atunci $a \equiv b \pmod{m}$ este echivalent cu $an \equiv bn \pmod{m}$.

Atunci $7^5 - 6^5 - 1 \equiv 0 \pmod{43}$ este echivalent cu $42(7^5 - 6^5 - 1) \equiv 0 \pmod{43}$ adică, folosind că $7^6 \equiv 6^6 \equiv 1 \pmod{43}$, este echivalent cu $6 - 7 - 42 \equiv 0 \pmod{43}$, ceea ce este evident.

Observaţie: Rezolvarea de mai sus este valabilă pentru orice numere naturale care dau rest 1 sau 5 la împărţirea cu 6, faptul că p este prim neavând o relevanţă prea mare.
Problema se găseşte la pagina 57 în cartea
Laurenţiu Panaitopol, Alexandru Gica – *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor. Idei şi metode de rezolvare*, Ed. GIL, 2006.