

ETAPA 7

Numele și prenumele: CIOCOIU Alexandru Boris
Colegiul „Național”, Iași

Problema 1. Să se arate că numărul 2015^{2016} poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte nenule, ca sumă de trei pătrate perfecte nenule cât și ca sumă de 2014 pătrate perfecte nenule.

* * *

Rezolvare:

Se poate scrie:

$$\begin{aligned} 2015^{2016} &= (5 \cdot 13 \cdot 31)^{2016} = 5^{2016} \cdot (13 \cdot 31)^{2016} = 5^2 \cdot 5^{2014} \cdot (13 \cdot 31)^{2016} = \\ &= (3^2 + 4^2) \cdot (5^{1007})^2 \cdot [(13 \cdot 31)^{1008}]^2 = [3 \cdot 5^{1007} \cdot (13 \cdot 31)^{1008}]^2 + [4 \cdot 5^{1007} \cdot (13 \cdot 31)^{1008}]^2 \end{aligned}$$

Se poate scrie:

$$\begin{aligned} 2015^{2016} &= (5 \cdot 13 \cdot 31)^{2016} = 13^{2016} \cdot (5 \cdot 31)^{2016} = 13^2 \cdot 13^{2014} \cdot (5 \cdot 31)^{2016} = 169 \cdot 13^{2014} \cdot (5 \cdot 31)^{2016} = \\ &= (3^2 + 4^2 + 12^2) \cdot (13^{1007})^2 \cdot [(5 \cdot 31)^{1008}]^2 = \\ &= [3 \cdot 13^{1007} \cdot (5 \cdot 31)^{1008}]^2 + [4 \cdot 13^{1007} \cdot (5 \cdot 31)^{1008}]^2 + [12 \cdot 13^{1007} \cdot (5 \cdot 31)^{1008}]^2 \end{aligned}$$

Se poate scrie: $2015^{2016} = 2015^2 \cdot 2015^{2014} = 2015^2 \cdot (2015^{1007})^2$. Vom arăta că numărul 2015^2 se poate scrie ca suma a 2014 pătrate perfecte.

Vom scrie mai întâi: $2015^2 = (1 + 2014)^2 = 1^2 + 2014^2 + 2 \cdot 2014 = 1 + 2014^2 + 4028$

Vom descompune acum numărul 4028 sub forma:

$$\begin{aligned}4028 &= 2000 + 2028 = 2000 + 1024 + 1004 = 2000 + 2^{10} + 1000 + 4 = \\&= 2000 + 2^{10} + 10 \cdot 100 + 4 = 2000 + 10 \cdot 10^2 + (2^5)^2 + 2^2 = \\&= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{\text{de } 2000 \text{ ori}} + \underbrace{10^2 + 10^2 + \dots + 10^2}_{\text{de } 10 \text{ ori}} + (2^5)^2 + 2^2\end{aligned}$$

Astfel, am descompus numărul 4028 într-o sumă de 2012 pătrate perfecte. Ca urmare, numărul $2015^2 = 1 + 2014^2 + 4028$ se scrie ca o sumă de 2014 pătrate perfecte. Înmulțind fiecare termen cu factorul $(2015^{1007})^2$ ajungem la concluzia că numărul 2015^{2016} se scrie ca o sumă de 2014 pătrate perfecte.