Problema 3. Punctele K, L, M şi N se află pe laturile (AB), (BC), (CD) şi (DA) ale unui pătrat $ABCD$ şi sunt la rândul lor vârfurile unui pătrat. Dreptele DK şi NM se intersectează în punctul E, iar dreptele CK şi LM se intersectează în punctul F. Demonstraţi că dreptele EF şi AB sunt paralele.

Concursul Sharigin, 2014

Soluţie:
Fie P şi Q punctele în care dreptele MN şi LM intersectează dreapta AB. Triunghiurile AKN, BLK, CML şi DMN sunt congruente (ipotenuză-unghi). Fie $AK = a$ şi $BK = b$. Atunci $BL = CM = DN = a$ şi $CL = MD = NA = b$. Triunghiurile PKN şi QLK sunt dreptunghice, deci, din teorema înălţimii, $PA \cdot a = b^2$ şi $BQ \cdot b = a^2$.

Asemănarea triunghiurilor PEK şi MED implică

$$\frac{KE}{DE} = \frac{PK}{MD} = \frac{PA + AK}{MD} = \frac{a + \dfrac{b^2}{a}}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab},$$

iar asemănarea triunghiurilor QFK şi MFC implică

$$\frac{FK}{CF} = \frac{QK}{MC} = \frac{QB + BK}{MC} = \frac{b + \dfrac{a^2}{b}}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Astfel, $\dfrac{KE}{DE} = \dfrac{FK}{CF}$, ceea ce arată că $EF \parallel AB$, c.c.t.d.